昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2012年1月1日発行　第50巻1号　毎月1回1日発行

ISSN 0386—2240

数理科学

1
2012

特集 数学から物理へ，物理から数学へ
分野を越えた新時代の数理科学



No.583

サイエンス社

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-86：for Senior & Graduate Courses）

リーマン予想の数理物理

ゼータ関数と分配関数

黒川信重・小山信也　共著

本体 2190 円　送料 290 円　表示価格は税抜きです

数学と物理のそれぞれの根本概念であるゼータ関数と分配関数を対比し，その密接な関連を手掛かりにリーマン予想に迫る．

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 583 January 2012

数学から物理へ，物理から数学へ

分野を越えた新時代の数理科学

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間（本誌のみ）11,000円，半年間（本誌のみ）5,500円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2008年/11 省略
2008年/12 確率論的物理観
2009年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求
2010年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和
2011年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説

数理科学臨時別冊一覧

10年/10 重点解説 ジョルダン標準形
10年/11 重点解説 ベクトル・テンソル
10年/12 行列解析の基礎
11年/1 超弦理論の基礎
11年/3 繰りこみ群の物理と数理
11年/4 超重力理論
11年/6 共形場理論
11年/9 演習形式で学ぶ 相転移・臨界現象
11年/10 実例で学ぶ 精度保証付き数値計算
11年/11 リーマン予想の数理物理
11年/12 量子多体系の物理

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
丸善多摩センター店
ジュンク堂書店吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂書店（盛岡）
丸善津田沼店
ジュンク堂書店（新潟）

戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂京都BAL店
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂書店三宮店
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂書店旭川店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
ジュンク堂書店（秋田）
ジュンク堂書店郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

——大学生協・売店——
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北1店）
九州大学（理系）

January 2012 MATHEMATICAL SCIENCES Number 583

特集／数学から物理へ，物理から数学へ

時代精神としての数理物理

加藤 晃史

1. はじめに

以前,「時代精神としての数理物理」という題名の研究集会が開かれました．個々の講演内容の記憶はだいぶ薄らいでいますが，そのネーミングには妙に心に響くものがありました．

数学と物理学は何百年も共に進化をし続け，今世紀に入ってからは数学では代数・解析・幾何といった分野の垣根を越えたり，物理学からの要請に応えた新しい分野の創成が起こったりしました．これに伴い，物理学を勉強する，あるいは研究していく上で，かつてより多くの数学を勉強する必要が出て来ているように思います．また，現代の数学系の大学院生や学部生も，特定の分野だけを勉強して，というようには行かなくなっているように思えます．

私は弦理論周辺の数理物理学という分野を研究しています．物理学科でカリキュラムとして用意されていた数学だけでは論文を読むこともできず，そのギャップに呆然とすることも多々ありました．しかし，厳密かつ精巧な数学の理論体系に憧れる一方で，物理的な直感がもたらす予言の確かさや的確さにも心惹かれる私にとって，数学・物理が入り交じる東西文明の十字路のようなダイナミズムを持つこの分野は見飽きることはありません．

本誌2008年3月号では,「現代物理のための数学キーワード」という特集が組まれました．そのときは取り纏め役を任されたのをこれ幸いと，自分が興味のあるキーワードのリストを作り，それらの解説を専門家にお願いするという形になりました．個人的には大変満足な特集号ができあがりましたが，執筆陣が結局数学者ばかりになってしまったことと，キーワードの選択に個人の趣味が反映しすぎたかも知れないことが，少々気になっていました．

そこで，新たな特集を機に，今回は弦理論や数理物理の第一線で活躍中の中堅・若手の物理学者の方々を中心に，キーワードの選択も含めて自由に書いていただこうと思い立ちました．通常は「○○○○というタイトルで書いてください」と執筆を依頼しますが，今回はあえてタイトルを未定とし,「自分が物理学を研究する上で大事・有用だと感じる数学について自由に思い入れや蘊蓄などを書いて下さい」という形でお願いしてみたかったのです．幸い，このような冒険的な提案に対して編集部からも賛同をいただき，今特集が組まれることとなりました*1)．

このような企画が成功するかどうかは，ひとえに執筆して下さる人たちにかかっています．おかげさまで，皆さん貴重な時間を割いてそれぞれに「思い入れ」の詰まった原稿を寄せて下さいました．

*1) 長尾さんは数学者ですが，東大数理で興味深い集中講義をしていただいたのであえてお願いしました．また，残念ながら今回ご執筆いただけなかった方々も，皆さん一家言をもっていると思うので，機会があれば是非それを披露していただけたらと思います．

2. 時代精神としての数理物理

今回の論説記事のタイトルを見ると，組み合わせ論・表現論・リーマン面・モノドロミー・超対称性・位相不変量・低次元トポロジー・局所化などがキーワードとして挙げられています．

組み合わせ論と数理物理学の関わりが深い理由は，そもそも場の理論や統計力学で最重要な分配関数が，状態の数え上げの母関数であることに起源があります．表現論は素粒子などの状態の分類に役立ってきましたが，近年では共形場理論や可解格子模型のように，分配関数や相関関数自体を，代数＝対称性の力で決定してしまおうという潮流が顕著です．これと相俟って，コンピュータの高性能化により「まず計算機で実験し，予想を立て，それから証明を考える」という研究スタイルがかなり広まってきたことも見過ごせません．

他のキーワードたちを見ると，数理物理学や場の理論においても「柔構造」と「剛構造」のせめぎ合いに人々の関心が集まっているように思えます．これはあくまで私個人の見解であり，執筆者の方々の「想い」とは異なるかも知れませんが．

場の理論でトポロジーが注目されるようになったのは比較的最近のことです．今特集号の各論説記事も，程度の差はあれ位相不変性と関係があります．トポロジーというと，くにゃくにゃした図形を扱う柔らかいイメージが先に立ちますが，その中心的な研究対象である「位相不変量」は，どんな変形にもビクともしないという逆説的な意味で極めて硬い構造であると言えます．

格子模型やゲージ場の量子論のような複雑な力学系から，どのようにして「硬い」部分と「柔らかい」部分とを切り分けるかについては様々なアプローチが考えられます．

超対称性に注目することは，今では基本的な戦略として多用されています．箱玉系のような離散的な力学系も，もともとはソリトン方程式という流体を記述する方程式の極限として発見されたものです．それが，量子群に現れる q 変形などと関係しているのは非常に不思議なことです．

モノドロミーとは，微分方程式の解を解析接続してもとに戻るときにもとの解とどれくらいずれるかを表す量です．経路というくにゃくにゃした対象と，解析接続の一意性という堅い構造を組み合わせるこの見方は，驚くほど深い真理を手繰り寄せてくれます．

「リーマン面」は，本特集号でも八面六臂の活躍をする実力者であるにもかかわらず，物理数学のカリキュラムではぞんざいな扱いを受けています．せいぜい「多価関数を一価に見えるように複素平面を切り貼りしたもの」と習う程度です．数学科でも，多様体の一般論は学んでも，リーマン面に固有の重要な話題は演習問題で触れるくらい．しかし大学院に進む頃にはいつの間にか基礎知識として仮定されているというしろものです．

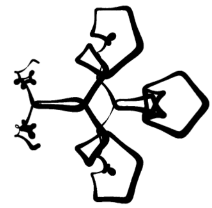
リーマン面と弦理論は切っても切れない関係にあります．弦理論の1つの定式化は，弦の運動を2次元の曲面上で定義された場の理論と読み替えることから始めます．なぜ2次元かというと，この次元でのみ世界面上の場の理論が共形不変性という大きな対称性を持つからです．これにより無限次元の経路積分が，リーマン面の複素構造（等角構造）の変形のモジュライ空間という有限次元積分へと一気に「局所化」され，本当に経路積分を実行できることにあります．

ところが，次元を1つ上げて3次元に移ると，様相がガラリと変わります．3次元の負曲率の世界では「剛性定理」が成り立ち，ホモトピー同値な図形はただ一つの幾何構造しか持ち得ないことになります．リーマン面のように自由に変形できないのです．こうした硬い世界では体積もまた非常に重要な位相不変量となります．こうした3次元の不思議さが，Calabi–Yau 圏という純代数的な世界にも浸透してゆくありようには，どこか畏怖の念さえ抱かずにはいられません．

読者の皆さんが，今回の特集号の論説から21世紀初頭の数理物理の時代精神を感じ取っていただけたら幸いです．

（かとう・あきし，東京大学大学院数理科学研究科）

局所化定理と超対称ゲージ理論



太田　和俊

1. はじめに

局所化定理（localization theorem）とは，ある種の積分がその積分領域の中のごく一部の局所的な情報だけで求まってしまうという形の定理（積分公式）である．ある種の積分がどういったものか，局所的な情報がどのようなものであるかは，あとでもう少し具体的にみることにするが，この局所化定理は非常に便利かつ有益な公式である．例えば，複雑な多様体上を積分領域として何かある量を積分を使って求めたいとき，その多様体全域について詳しく知る必要はなく，局所的な部分多様体もしくは多様体上の点とそのまわりの情報のみで積分量が評価できてしまう．もちろん，どのような多様体上でも，また，どのような被積分関数でもこのようなことができるわけではないが，数学や物理で重要な量がこの局所化定理にあてはまり計算できた例も多い．

この局所化定理は，初め，どちらかといえば物理ではなく数学のほうで様々な重要な結果をもたらしてきた.「定理」の名が示すように，もともとDuistermaat と Heckman が数学の定理として証明を与え[1)]，その後 Atiyah や Bott といった数学者たちが様々な問題に応用することを試みた．局所化定理の初めの問題設定自体は古典統計力学の分配関数に相当する積分計算であるので，物理に非常に関係した話ではあったが，当初は物理の側からの注目はそれほどなかった．

しかし，その後 Witten によって局所化定理に現れる数学と物理学（場の理論）における**超対称性**（supersymmetry）との関連が指摘され，注目されるようになった．さらに，2 次元や 3 次元のゲージ理論（低次元ゲージ理論）で分配関数などが厳密に計算でき，理論が厳密に「解ける」理由が局所化定理によることが，これも Witten によって示された．最近になって，超対称ゲージ理論においてインスタントンなどのソリトンがもたらす非摂動論的効果が Nekrasov らによって厳密に計算できることが示されたが，これも局所化定理の応用の一つである．

このように，局所化定理は数学と物理の間にまたがって重要な結果を数多く生み出している．数学や物理で何か複雑な問題がより簡単な問題に帰着して「解ける」場合，直接的でないにせよその背後で局所化定理が働いている事実にたびたび遭遇する．本稿では，この局所化定理についてその大まかな内容と，その応用について最近の話題にも触れつつ紹介してみたいと思う．

2. 局所化定理

局所化定理について説明するために，簡単な例から始めよう．簡単な例といっても局所化定理がもともと考えられた動機となった問題であるし，定理の本質はほとんどこの例でつきている．

考えるのは n 粒子系の古典統計力学の分配関数

$$Z = \int_M \frac{\omega^n}{n!} e^{-\beta H(\vec{q},\vec{p})} \tag{1}$$

である．ここで，β は逆温度，$H(\vec{q},\vec{p})$ は粒子の位置座標 $\vec{q}$ と運動量 $\vec{p}$ で表されたハミルトニアンであり，分配関数は位相空間 M 上のシンプレクティック 2 形式 ω から作られた体積形式 $\omega^n/n!$ の下で，位相空間全域にわたる積分として表されている．シンプレクティック 2 形式 ω は $d\omega = 0$ を満たす閉形式で，ハミルトニアンとともに

$$dH = \iota_X \omega \tag{2}$$

によって Hamilton ベクトル場 X を定める．ここで，$\iota_X \omega$ はシンプレクティック 2 形式 ω とベクトル場 X との内積を表す．

$2n$ 次元の位相空間上では $2n$ 形式の積分だけが残るものと了解すれば，体積形式のシンプレクティック 2 形式は指数関数の肩に上げることができて，分配関数 (1) は

$$Z = \int_M e^{-\beta H + \omega} \tag{3}$$

と書き直せる．

さて，ここで次の演算子

$$d_X = d + \beta \iota_X$$

を考えよう．この演算子は微分形式の次数を 1 つだけ上げる演算子である外微分 d と，次数を 1 つだけ下げる内積 ι_X が合わさった一風変わったものであるが，次のような非常に面白い性質がある．まず，書き直した分配関数 (3) の指数関数の肩の部分にこの演算子を作用させると，(2) を用いて，

$$d_X(-\beta H + \omega) = -\beta(dH - \iota_X \omega) = 0$$

が成り立つ．ここで，H がスカラー関数 (0 形式) であることから従う $\iota_X H = 0$ と，シンプレクティック 2 形式が閉形式であることを使った．次に，この演算子を 2 回作用させることを考えると，

$$d_X^2 = \beta(d\iota_X + \iota_X d) = \beta \mathcal{L}_X$$

となる．ここで，$\mathcal{L}_X$ は Lie 微分であり，$d^2 = \iota_X^2 = 0$ であることを用いた．

通常，2 回作用させてゼロになるような演算子があれば，それを用いてコホモロジーを構成することができるが，d_X は 2 回作用させてゼロにはならないためそのままではコホモロジーを構成することができない．しかし，扱う微分形式 Ω をすべて Lie 微分 $\mathcal{L}_X$ に対して不変，すなわち $\mathcal{L}_X \Omega = 0$ となるものだけを考えるとすればどうだろうか？ このような微分形式だけに限れば $d_X^2 \Omega = \beta \mathcal{L}_X \Omega = 0$ を満たし，コホモロジーを構成することができる．このように構成したコホモロジーを**同変コホモロジー**（equivariant cohomology）と呼ぶ．上で見たように，分配関数 (3) の指数関数の肩は同変コホモロジーの元となっている．

この同変コホモロジーを使って分配関数を次のように変形しよう．

$$Z_\lambda = \int_M e^{-\beta H + \omega - \lambda d_X \psi}. \tag{4}$$

ここで，ψ は $\mathcal{L}_X \psi = 0$ を満たし，$d_X \psi$ は同変コホモロジーの意味で完全（exact）になっている．このように完全な微分形式をパラメータ λ とともに分配関数に付け加えたわけだが，実は，$-\beta H + \omega$ が d_X に対して閉であることを使うと，この変形した分配関数はパラメータ λ に全く依らないことがわかる．つまり，$\frac{\delta Z_\lambda}{\delta \lambda} = 0$ を満たす．

もし，変形した分配関数 (4) がパラメータ λ に依らないのであれば，都合の良い（計算しやすい）ように $\lambda d_X \psi$ の部分を適当に選んで，λ が非常に大きいものとして計算してしまえば，もともとの分配関数にあった $-\beta H + \omega$ の部分の影響は相対的に小さくしてしまうことができ，計算が遥かに簡略化される．これが局所化定理の基本的な考え方である．このようなやり方を「巧み」と思うか「ずるい」と思うかは人それぞれであろうが，私はどちらかというと初めは後者の印象であった．

$\lambda d_X \psi$ の部分をどう選ぶかであるが，通常は積分しやすいように指数関数が Gauss 関数となるように選ぶ．今の場合だと，位相空間に計量 g_{ij} を導入して

$$\lambda d_X \psi = \lambda g_{ij} X^i X^j + \cdots$$

となるように選んだほうが都合がよい．ここで，ベクトル場 X に対する Gauss 積分のパラメータ λ の依存性は「$\cdots$」の部分が打ち消している．Gauss 関数は図 1 のような形をしているが，λ がどんどん

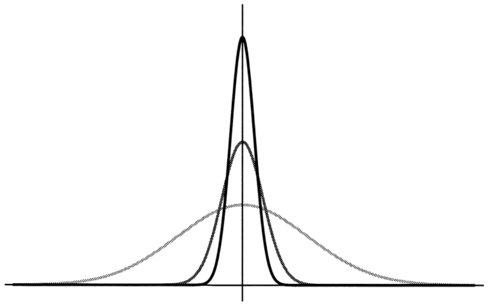


図1　Gauss 関数 $\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}e^{-\lambda x^2}$ のグラフ．λ が大きくなるにつれ，デルタ関数に近づく．

大きくなるにつれて細く高くなり，次第にDiracのデルタ関数に近づいていく．すなわち，λ を大きくしていくと $X=0$ の点のまわりに積分領域が「局所化」していき，最終的には $X=0$ の点とその周りだけの情報だけで積分の値が決まってしまうようになる．これが，局所化定理の名前の由来である．

以上のような考えに基づき，より丁寧にGauss積分と積分変数の間のヤコビアンなどを計算すれば，最終的に分配関数が $X=0$ の点，すなわち，(2) より $dH=0$ を満たす位相空間の点上の和として

$$Z=\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^n \sum_{dH=0}\sqrt{\frac{|\det\omega_{ij}|}{|\det\partial_i\partial_j H|}}e^{-\beta H} \quad (5)$$

と表される．これが局所化定理を古典統計力学の分配関数に適用した結果である．説明の途中に少しだけ位相空間の計量が登場したが，最終結果では計量が全く不要であることに注意したい．

ここでの説明ではあまり詳しく述べなかったが，この定理が適用できるのは積分領域がシンプレクティック2形式を持つシンプレクティック多様体であることと，同変コホモロジーを構成するためにシンプレクティック多様体がベクトル場 X に対するアイソメトリーと呼ばれる対称性を持つことが重要である．

このように限られた状況でしか適用できない定理とは言え，もともとの分配関数の積分 (1) が多様体全域にわたる積分ではなく，限られた点とその近傍の情報で書けてしまうというのは非常に強力である．

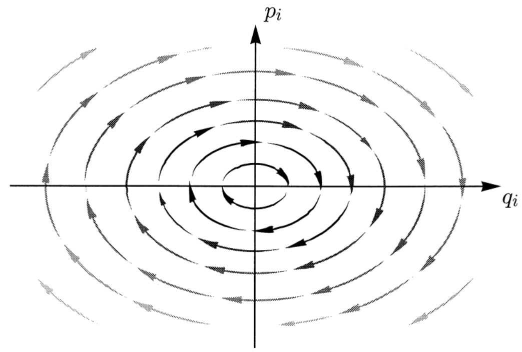


図2　調和振動子の Hamilton ベクトル場．固定点は原点になる．

この局所化定理を簡単な n 個の調和振動子のハミルトニアン

$$H=\frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2}+\frac{k}{2}\vec{q}^{\,2}$$

の場合に使ってみよう．この場合 $dH=0$ となる点，すなわちベクトル場の固定点は $\vec{q}=\vec{p}=0$ の位相空間の原点となる（図2）．よって，分配関数は局所化公式 (5) を適用すれば，

$$Z=\left(\frac{2\pi}{\beta}\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^n e^{-\beta H(\vec{0},\vec{0})}=\left(\frac{2\pi}{\beta}\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^n$$

と求まる[*1]．この例では，あえて局所化定理で求めたが，この簡単な例では局所化定理を用いるまでもなく，良く知られているようにGauss積分を使って直接積分できてしまうので，局所化定理を用いるありがたみは少ない．実は，この簡単な例に限らず，局所化定理を適用して分配関数の積分が厳密に実行できるというのは，結局，平方完成や変数変換などを使いGauss積分などに持っていって（がんばれば）積分が実行可能ということなのである．

しかし，計量が具体的に知られていないような複雑な多様体上の積分に対しても局所化定理は適用でき，一見，積分できないようなより難しい問題に対して局所化定理はより有効に働く．

3. 超対称性

局所化定理の説明の途中で登場した同変コホモ

*1）　無限遠点まで含めて考えると無限遠点も固定点となり得るが，無限遠点で $e^{-\beta H}\to 0$ となるので，この場合にはいずれにせよ分配関数に寄与しない．

ロジーは，局所化定理において非常に重要な働きをする数学的な概念であるが，その同変コホモロジーは物理の問題として考えられてきた「超対称性」と驚くべきほどうまく対応している．

もともと，超対称性は素粒子の統一理論における階層性の問題を解決するために，ボゾンとフェルミオンの間の対称性として導入された．ここで，ボゾンは交換する場であり，フェルミオンは反交換する場である．この超対称性を実現する変換を Q と呼ぶことにすると，Q はボゾンをフェルミオンに移し，フェルミオンをボゾンに移す．特に興味深いのは，この超対称性変換を 2 回続けて行うと，Lorentz 変換やゲージ変換などの理論が持つ対称性の生成子となる．

一方，前節で扱った微分形式では，座標やスカラー関数等は交換する量であり，微分 1 形式などはウェッジ積の下で反交換する量であった．また，同変コホモロジーを構成する演算子 d_X は 2 回続けて行うと位相空間の対称性であるアイソメトリーの生成子（Lie 微分）となる．

これらのことを考えると，超対称性と同変コホモロジーの構成で現れたものが非常に良く対応していることがわかる．つまり，

座標 $x \leftrightarrow$ ボゾン，

微分形式 $dx \leftrightarrow$ フェルミオン，

演算子 $d_X \leftrightarrow$ 超対称性変換 Q

という対応がある．

ただ，超対称性変換そのものだと 2 回続けた変換 Q^2 が様々な対称性の変換を含んでしまうので，同変コホモロジーの d_X との対応がつけにくい．実際には，超対称性変換の中から特別な成分を選び出して，

$$Q^2 \sim (\text{ゲージ変換})$$

となるものを用いる．ゲージ対称性を持つ理論では，物理的な量としてゲージ変換に対して不変なものだけを取り扱うので，Q^2 はゲージ不変な量に対してはゼロとなり，物理的に意味のある自然なコホモロジーを構成する．このような超対称性変換の中から同変コホモロジーに対応するものを選び出す操作を，**位相的ツイスト**（topological twist）と呼び，選び出した超対称性変換 Q は慣例で BRST 変換と呼ばれる*2)．また，このような操作によって得られた理論を**位相的場の理論**（topological field theory）と呼ぶ．

位相的場の理論の量子化は通常の場の理論と同様に，経路積分による分配関数

$$Z = \int \mathcal{D}(\text{fields})\, e^{-S} \tag{6}$$

によって行われる．ここで，$\mathcal{D}(\text{fields})$ は理論に現れる場の経路積分における積分測度を表す．興味深いことに，位相的場の理論の作用汎関数の中には BRST 変換を用いて，

$$S = \frac{1}{g^2} QV$$

と書くことができるものが存在する．ここで，V はゲージ不変な汎関数である．つまり，作用が BRST 変換 Q の意味で完全になっている．

これは，前節の説明で後から付け加えた d_X-完全な項と良く似ている．実際，この超対称ゲージ理論の場合にも同変コホモロジーと同様に，分配関数 (6) そのものと，Q-閉（$Q\mathcal{O} = 0$）である演算子 $\mathcal{O}$ の期待値

$$\langle \mathcal{O} \rangle = Z^{-1} \int \mathcal{D}(\text{fields})\, \mathcal{O}\, e^{-S}$$

に限れば，その値が作用全体にかかるパラメータ（ゲージ結合定数）g に依らないことを示すことができる．つまり，分配関数や Q-閉な演算子の期待値を計算する場合はゲージ結合定数を好きな値に選んでよく，特に計算しやすい弱結合極限（$g \to 0$）で計算したものが厳密な答えを与える．摂動計算でいえば，これはちょうど 1 ループの計算（WKB 近似）だけで積分が局所化し，厳密な答えを与えるということである．また，その積分が局所化する場の配位は BRST 変換の固定点であることも知られている．

このように，数学における同変コホモロジーの理論と物理における超対称ゲージ理論の類似性を用いれば，場の理論においても局所化定理を用いることができると期待できる．

*2） これは，ゲージ理論の量子化の際に登場する BRST 変換と変換性が類似しているためである．

4. 低次元ゲージ理論

2 次元などの低次元のゲージ理論ではゲージ場の自由度が小さく，分配関数などを厳密に計算できる例がいくつか知られている．例えば，2 次元で物質場を含まない Yang–Mills 理論では，経路積分を行った後の分配関数の厳密な表式が Migdal によって求められている．このような低次元の場の理論に対して，その理論が厳密に計算できる理由を局所化定理によって説明したのが Witten である[2]．ここでは，2 次元のゲージ理論を例にとって，古典統計力学の例と比較しながら説明したいと思う．

まず，2 次元の BF 理論と呼ばれる単純なゲージ理論の分配関数

$$Z = \int \mathcal{D}\Phi\mathcal{D}A\, e^{-\int d^2x\, \mathrm{Tr}(i\Phi F)} \tag{7}$$

を考えよう．ここで，A はゲージ場，Φ は随伴表現のスカラー場で，ゲージ群は $U(N)$ とする．

この理論に対して，天下りではあるがゲージ場と対をなすフェルミオン（ゲージーノ）λ を導入し，分配関数を

$$Z = \int \mathcal{D}\Phi\mathcal{D}A\mathcal{D}\lambda\, e^{-\int d^2x\, \mathrm{Tr}(i\Phi F + \frac{1}{2}\lambda\wedge\lambda)} \tag{8}$$

と書き換える．ここで，λ についての Gauss 積分は分配関数の値を変えないことに注意しよう．このとき，理論の作用

$$S_0 = \int d^2x\, \mathrm{Tr}\left(i\Phi F + \frac{1}{2}\lambda\wedge\lambda\right)$$

は，次の BRST 変換

$$\begin{aligned} &QA = i\lambda, \quad Q\lambda = -d_A\Phi, \\ &Q\Phi = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

の下で不変，すなわち $QS_0 = 0$ を満たすが，Q-完全なものとして書くことはできない．2 節の同変コホモロジーとの対応を考えれば，この理論の作用 S_0 はちょうど古典統計系のハミルトニアンに相当する．

さらに，この理論に対してボゾン場とフェルミオン場の対をいくつか付け加えれば，この理論は 4 つの超対称性電荷をもつ超対称ゲージ理論（2 次元 $\mathcal{N} = (2,2)$ 超対称ゲージ理論）を位相的ツイストした位相的場の理論に埋め込むことができる．

前節で述べたように，位相的場の理論の作用 $S=\frac{1}{g^2}QV$ はBRST変換に対して完全なものとして書かれ，作用全体にかかるパラメータ（ゲージ結合定数）に依ることなく理論を変形することができる．すなわち，分配関数 (7) もしくは (8) はその値を変えることなく，位相的場の理論における経路積分

$$Z=\int\mathcal{D}(\text{fields})\,e^{-\int d^2x\,\mathrm{Tr}(i\Phi F+\frac{1}{2}\lambda\wedge\lambda)-\frac{1}{g^2}QV}$$

として表すことができる．別の言い方をすれば，元の理論の分配関数はコホモロジカル*3) な演算子 $\mathcal{O}=e^{-\int d^2x\,\mathrm{Tr}(i\Phi F+\lambda\wedge\lambda)}$ の位相的場の理論における期待値として理解できる．

場の理論の分配関数は場のすべての配位に対する無限次元の経路積分で表されるので，積分を正確に実行することは一般に非常に難しい．しかし，2節の例と同様の議論を行うと，元の理論の分配関数は Q-完全な作用の1ループ（WKB 近似）で厳密に評価できてしまう．特に，BRST 変換の固定点を調べると，場の理論の無限次元の経路積分は有限次元の積分に「局所化」し，積分が大幅に簡単化されることがわかる．分配関数 (7) の場合はその有限次元の積分さえもさらに実行可能で，最終的に

$$Z=\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^N}\prod_{i<j}(n_i-n_j)^{2-2h}$$

という離散的な和として表される．ここで，h はゲージ理論を考えている2次元 Riemann 面の種数（genus）である．まとめると，BF 理論の分配関数 (7) の経路積分には局所化定理が適用でき，もともと無限次元の積分であった場の理論の経路積分が，自由度が圧倒的に少ない固定点全体にわたる離散的な和に帰着したということである．

同様の議論がBF 理論の作用をスカラー場 Φ のポテンシャルで変形した

$$S_{\mathrm{2dYM}}=\int d^2x\,\mathrm{Tr}\left(i\Phi F+\frac{\mu}{2}\Phi^2\right)\qquad(10)$$

の作用を持つ理論に対しても成立する．これは，BRST 変換 (9) からわかるように，Φ のポテンシャルはそれ自身が Q-閉（$Q(\frac{\mu}{2}\Phi^2)=0$）だからである．この理論は Φ を補助場と思って積分すれば，2次元の Yang–Mills 理論と等価である．つまり，2次元の Yang–Mills 理論に対しても，(10) の形の作用から出発すれば局所化定理が適用でき，経路積分の結果を離散的な和として表すことができる．

実際には Migdal が示したように，局所化定理に依らなくても通常の場の理論の手法を用いて，BF 理論や2次元 Yang–Mills 理論の分配関数は（がんばれば）厳密に直接積分可能である．しかし，なぜ厳密に積分を実行でき，理論を「解く」ことができたのか？ という問いに対しては，2次元のゲージ理論が局所化定理を適用できる系であったからと答えることができよう．

*3) Q-閉であるが Q-完全でない．

5. さらなる応用と展望

BF 理論の分配関数 (7) に対して Φ の積分を先に実行したとすれば，

$$Z=\int\mathcal{D}A\,\delta(F)$$

となり，非常におおざっぱな言い方をすれば，BF 理論の分配関数は $F=0$ を満たすゲージ場（平坦接続）全体の空間の「体積」を求めているともいえる．

一般に，超対称ゲージ理論の分配関数の計算は BPS 方程式と呼ばれる微分方程式系の解空間（モジュライ空間）の体積に関係した量を与える．特に超対称ゲージ理論が BPS 方程式の解であるソリトンから受ける非摂動論的な寄与を考える場合，その BPS ソリトンのモジュライ空間の体積を知ることは重要な問題となる．

そのような考えに基づいて，Nekrasov は $\mathcal{N}=2$ の超対称性を持つ4次元のゲージ理論に対して，インスタントンが寄与する非摂動効果を厳密に計算した[3]．具体的にはインスタントンのモジュライ空間の体積を局所化定理を用いて計算したのである．インスタントンのモジュライ空間の計量から体積要素を求め，その積分から体積を計算するのは一般に非常に困難な問題である．しかし，BPS ソリトンのモジュライ空間は局所化定理が適用できる条件が整った Kähler 多様体や超 Kähler 多様体などのシンプレクティックな複素多様体になっていて，古典統計系での位相空間の例でも見たよ

うに具体的な計量を知ることなく体積要素上の積分を実行することができる．インスタントンに関する結果は今では色々な側面から調べられ，特に統計力学系や2次元共形場理論などの可積分系との関連も指摘されている．これらインスタントンに関する結果については，今では多くの解説記事が書かれているのでそれらを参考にされたい．

さらに，最近になって S^4 や S^3 などの球面で定義された，4次元や3次元の超対称ゲージ理論の分配関数や球面の大円にそったWilsonループの期待値が局所化定理を用いて厳密に計算されるようになった[4]．球面にはもともと極軸を中心にした回転のアイソメトリーがあるので，超対称変換からこのアイソメトリーを含む同変コホモロジーを構成すれば，分配関数やアイソメトリーの構造を壊さないWilsonループの期待値が局所化定理を用いて計算できるというわけである．

このように，局所化定理は数学のみならず，場の理論や弦理論などの物理の計算にたびたび現れ重要な結果をもたらしている．その多くは超対称性を持った理論に関連したものだけで，局所化定理が適用できる対象は物理理論全体から見ればごく限られたものであるかもしれない．しかし，物理において場の理論が非摂動効果も含めて厳密に解けるというのは非常に重要である．なぜなら厳密に解ける問題を通じて，ゲージ理論や弦理論の双対性など，より一般的な概念を深く理解することも可能だからである．また，厳密に解ける場の理論の結果が，可積分系などを通じて様々な物理や数学と深くつながっていくという事実も非常に興味深い．

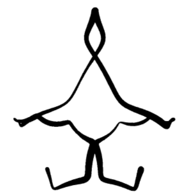
物理における問題が「解ける」ということがどのようなことなのか，局所化定理はそのことを理解するための重要な鍵の一つとなるであろう．

参考文献

1) J.J. Duistermaat and G.J. Heckman, *Invent. Math.* **69** (1982) 259.
2) E. Witten, *J. Geom. Phys.* **9** (1992) 303–368. [hep-th/9204083].
3) N.A. Nekrasov, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** (2004) 831 [arXiv:hep-th/0206161].
4) V. Pestun, arXiv:0712.2824 [hep-th]; A. Kapustin, B. Willett and I. Yaakov, *JHEP* **1003** (2010) 089 [arXiv:0909.4559 [hep-th]].

（おおた・かずとし，明治学院大学法学部）

弦理論と等角写像



大川　祐司

1. はじめに

重力の理論である一般相対性理論とミクロな世界の理論である量子力学は，一つの理論的な枠組みで矛盾なく説明することができていません．弦理論はこの難問に対して重要な手がかりを与えると期待されている理論で，物理学の中で最も数学的な分野の一つですが，必ずしも高度な数学ばかりが使われているわけではありません．今回は複素関数論で習う等角写像をうまく使って弦の相互作用を表し，とても複雑な運動方程式を解析的に解くことができたという近年の進展に関する話をしたいと思います．

2. 対称性

2次元平面でデカルト座標 (x, y) を用いたとき，2点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) の間の距離は

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \tag{1}$$

ですね．これを別の座標系でも求めることができるでしょうか．まず

$$x' = x + a, \quad y' = y + b \tag{2}$$

のように平行移動した座標系 (x', y') で考えると，座標系 (x, y) で (x_1, y_1) だった点は $(x_1{+}a, y_1{+}b)$ に，(x_2, y_2) は (x_2+a, y_2+b) に座標が変わりますが，2点間の距離は $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ のままです．同様に，回転した座標系で計算しても2点間の距離は同じであることが確認できます．次に

$$x' = \alpha x, \quad y' = \alpha y \tag{3}$$

のように**スケール変換**した座標系 (x', y') で2点間の距離を計算すると $\alpha\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ のように α 倍になります．違う値になったので，もとの座標系での距離が求められなかったと考えることもできますが，もしも距離はこのようなスケール変換で α 倍になるということを知っていたとしたら，この座標系で計算した距離を α で割ればもとの座標系での距離が求められます．

これらはあまりにも自明なことに思われるかもしれませんが，次に統計力学や量子場の理論での**相関関数**について考えてみましょう．今回は磁石などの性質に重要なスピンの相互作用を簡単化した模型である2次元正方格子上のIsing模型を例に考えてみます．2次元の座標を x と y とし，x と y がともに整数である格子点上に図1のように上向きか下向きの矢印を書くことにします．矢印は同じ向きを向きたがる傾向があるとし，隣り合う矢印が同じ向きのときよりも異なる向きのときのほうがエネルギーが高いとします．このようにして物理量の統計力学的な平均を考えます．すなわちエネルギーが高い矢印の配位のほうがエネルギーの低い配位よりも実現される確率が低いとして平均を取ります．この際，エネルギーの違いを

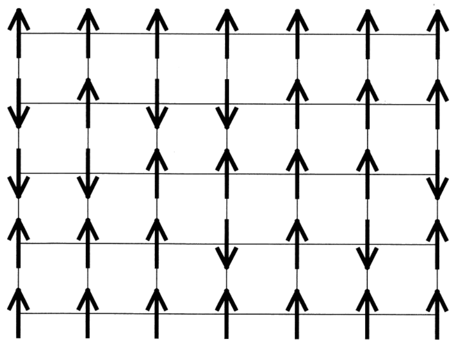


図1　Ising 模型.

どのように確率の違いに反映するかを指定するパラメーターとして温度を導入します．温度が低い場合は，エネルギーが少しでも高くなると実現される確率が大幅に下がります．一方，温度が高い場合は，エネルギーが多少変わっても実現される確率はあまり変化しません．ですから多少エネルギー的には損な配位でも，場合の数がたくさんあれば平均を取るときに効いてきます．これはエネルギーの効果に対してエントロピーの効果が効いてくるようになる，と表現することもできます．

さて，矢印が上向きの場合を $\sigma=+1$，矢印が下向きの場合を $\sigma=-1$ として，(x_1,y_1) という格子点での σ の値 $\sigma(x_1,y_1)$ と (x_2,y_2) という格子点での σ の値 $\sigma(x_2,y_2)$ の積の統計力学的な平均値を

$$\langle\,\sigma(x_1,y_1)\,\sigma(x_2,y_2)\,\rangle \tag{4}$$

と表記することにします．これが相関関数です．さきほどの2点間の距離と同様に，相関関数は平行移動した座標系でも計算することができます．式で書くと

$$\begin{aligned}&\langle\,\sigma(x_1+a,y_1+b)\,\sigma(x_2+a,y_2+b)\,\rangle\\&=\langle\,\sigma(x_1,y_1)\,\sigma(x_2,y_2)\,\rangle\end{aligned} \tag{5}$$

ということです．今は σ が2つの相関関数を考えましたが，もっと一般的な演算子の相関関数を考えることもできます．また，演算子の数も2つには限らず，一般的には n 個の演算子を含む n 点相関関数を考えます．そして考えている系が平行移動や回転という対称性を持つ場合には，これらの n 点相関関数は平行移動した座標系や回転した座標系でも計算できます．

統計力学的な平均を取る際には，温度というパラメーターがあるということを説明しましたが，実際の磁石では温度を上げていくとある温度で相転移を起こして強磁性がなくなります．このような磁石の模型である2次元の Ising 模型でも，温度を変えていくとある温度で相転移が起こります．そしてその相転移温度では，平行移動や回転だけではなく，スケール変換も模型の対称性になります*1)．すなわち，相関関数が (3) 式のようにスケール変換した座標系でも計算できるということになります．しかし，演算子も適切に変換しなければなりません．例えば h と C を定数として

$$\begin{aligned}&\langle\,\sigma(x_1,y_1)\,\sigma(x_2,y_2)\,\rangle\\&=\frac{C}{[\,(\,x_1-x_2\,)^2+(\,y_1-y_2\,)^2\,]^h}\end{aligned} \tag{6}$$

であった場合は，

$$\sigma(x,y)\to\alpha^h\sigma(\alpha\,x,\alpha\,y) \tag{7}$$

のように変換させます．実際に，座標系 (x',y') で (6) 式が再現できることは

$$\begin{aligned}&\langle\,\alpha^h\sigma(\alpha\,x_1,\alpha\,y_1)\,\alpha^h\sigma(\alpha\,x_2,\alpha\,y_2)\,\rangle\\&=\frac{\alpha^{2h}\,C}{[\,(\,\alpha\,x_1-\alpha\,x_2\,)^2+(\,\alpha\,y_1-\alpha\,y_2\,)^2\,]^h}\\&=\frac{C}{[\,(\,x_1-x_2\,)^2+(\,y_1-y_2\,)^2\,]^h}\end{aligned} \tag{8}$$

のように確認できます．ここでは2点の相関関数の結果から演算子の変換性を決めたので，ずるいと感じられるかもしれません．しかし，もしも2点の相関関数が2点間の距離のべき乗という形ではなく，例えば指数関数的な振舞いだったら，変換性を工夫してもこのようにうまくは行きません．さらに，ひとたび演算子の変換性を決めてしまったら，任意の n 点相関関数に対して同じ変換を

*1)　格子間隔に比べて十分に長いスケールの物理に興味があるので，繰り込みという操作を伴って格子間隔をゼロにする連続極限を取るのですが，その詳細は今回の話では重要ではありません．

しなければなりません．そして驚くべきことに，相転移温度での 2 次元の Ising 模型は，スケール変換だけではなく，一般的な等角写像が対称性になっています．このことについて次に考えていきましょう．

3. 等角写像

座標系 (x,y) で $z=x+iy$，座標系 (x',y') で $z'=x'+iy'$ という複素数の座標を導入します．そして $f(z)$ を z の正則関数として

$$z'=f(z) \tag{9}$$

という座標変換を考えます．例えばさきほどの平行移動は $w=a+ib$ として $f(z)=z+w$ に対応し，スケール変換は $f(z)=\alpha z$ に対応します．このような座標変換において，$f(z)$ が z_0 で微分可能であり，$f'(z_0)\neq 0$ であったとすると，$z'=f(z)$ は z_0 で等角写像を与えます．すなわち z_0 を通る任意の 2 つのなめらかな曲線に対して，それぞれの上に z_0 に十分に近い点 z_1,z_2 をとり，$z'_i=f(z_i)\,(i=0,1,2)$ とすると，$z_1\to z_0, z_2\to z_0$ の極限で $\angle z_1z_0z_2=\angle z'_1z'_0z'_2$ になります．例えばデカルト座標 (x,y) で直交している x 軸に平行な直線と y 軸に平行な直線は，$z'=f(z)$ で一般に曲線になりますが，交点では依然として直交しています．

このような座標変換 $z'=f(z)$ が相転移温度での 2 次元の Ising 模型の対称性であるということは，もとの座標系 z での相関関数が，演算子の変換性を適切に決めれば変換後の座標系 $z'=f(z)$ でも計算できるということを意味します．このような変換は**共形変換**と呼ばれ，このような変換に対する対称性を持つ理論は**共形場の理論**と呼ばれます．相転移温度での 2 次元の Ising 模型は，共形場の理論の一つです．

等角写像の具体的な例として，指数関数で与えられる変換

$$z'=f(z)=e^z \tag{10}$$

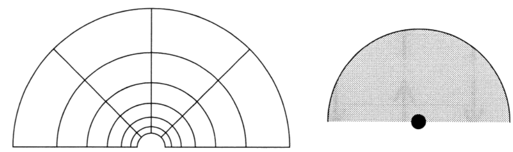


図 2　指数関数での座標変換．

を考えてみましょう．変換前の座標系で y 方向は $0\le y\le\pi$，x 方向には無限に伸びる帯状の領域を考えます．$x=a$ で $0\le y\le\pi$ の線分は，$e^z=e^ae^{iy}$ ですから原点を中心とする半径 e^a の円の上半分に変換されます．ここで a の値を $-\infty$ から ∞ まで変えると，円の半径が 0 から ∞ に変化しますので，帯状の領域全体は，z' の複素平面の上半平面に変換されることが分かります．また，図 1 のような長方形の格子は図 2 の左図のような形に変換されます．このように，平行移動や回転と違って等角写像は一般に領域の形を変えてしまいます．このような変換が対称性であるということは，例えば帯状の領域での相関関数が，上半平面での相関関数から再現できるということです．現実の磁性体の模型としての立場では，このように領域の形を変えてしまう座標変換というのはずいぶん奇妙ですが，後で見るように弦理論ではこのような座標変換が重要な役割を果たしています．

4. 状態と演算子の対応

さきほどの帯状の領域での Ising 模型で x 座標が空間の座標ではなく時間 t であった場合は，$0\le y\le\pi$ という線分上に並んだ矢印の量子的な状態 $|\psi(t)\rangle$ の時間発展を表していると考えることができます．x 座標が時間ではなく空間の座標であっても似たような考え方ができ，**状態**というものを定義することができます．

ちょうど図 1 のような $-6\le x\le 0,\ 0\le y\le 4$ という長方形の領域での Ising 模型を考えてみましょう．x と y がともに整数である格子点に矢印を書くことにしますが，$y=0$ と $y=4$ のときには矢印は上向きにするという境界条件を課す

ことにします．すなわち一つの整数 x に対して，$y=1,2,3$ の3点の矢印のみを上向きか下向きに選ぶことができるということです．全部で $2^3=8$ 通りですね．さて，x 座標を時間のように取り扱うとして，$x=-6$ に“初期条件”を課すことにします．例えば $x=-6$ で自由に選べる3つの矢印の向きを，8通りの中から一つ選んだとします．そして先に述べた方法で統計力学的な平均を取ると，$x=0$ で8通りの配位がどのような確率で実現されるかが決まります．実際には連続極限などがあってもっと複雑ですが，これが $y=0$ と $y=4$ に境界条件を課し，$x=-6$ に初期条件を課して決まる $x=0$ での状態のイメージです．

さて，格子間隔を小さくして，長方形領域を $-a\leq x\leq 0, 0\leq y\leq\pi$ にして $y=0$ と $y=\pi$ で適切な境界条件を課し，温度を相転移温度に設定したとします．すると共形変換が対称性になりますから，先ほどの $z'=e^z$ という指数関数の変換をしてみます．変換前に状態が定義されていた $x=0$ の線分は，図2の左図の外側の半円のように原点を中心とする半径1の円の上半分に変換されます．一方，初期条件を課していた $x=-a$ の線分は，図2の左図の内側の半円のようにより小さい半径の円の上半分に変換されます．この小さい半円上での矢印の配位の分布を指定すると，半径1の円の上半分に定義される状態が決まるということです．ここで a の値を大きくしていくと，初期条件を課す半円がどんどん小さくなります．そして $a\to\infty$ という極限では図2の右図のように，初期条件を課すことが原点に何かの演算子を挿入することと等価になります．原点に挿入する演算子を決めると半径1の円の上半分に定義される状態が一意に決まり，逆に半径1の円の上半分に定義される状態を選ぶと原点に挿入する演算子が一意に決まります．このような状態と演算子の間の1対1対応は，共形場の理論の重要な特徴の一つです．このことを用いて，ある状態が与えられたとき，この1対1対応で対応する演算子を原点に挿入し，図2の右図の領域での統計力学的な平均を考えたときに半径1の円の上半分

に現れる状態というようにその状態を表現することができます．

5. 弦の場の理論

2次元の共形場の理論は大変豊かな内容を持っており，とてもここでは書き尽くせませんし，そもそも私が知っていることはその大きな世界のごく一部に過ぎませんが，今回は弦理論との関係を考えることにします．

弦理論の基本的なアイディアはとてもシンプルで，素粒子が実はひものように1次元的に広がっていると考えてみよう，ということです．そのような弦はとても小さいので，粒子のように見えますが，弦の振動状態によって質量やスピンが異なった別の粒子のように振る舞います．弦の振動状態は無限の種類がありますから，対応する粒子も無限種類あることになります．

現在の素粒子論では，素粒子を量子場の理論を用いて記述しています．例えば，光子は電場や磁場の振動状態を量子力学的に扱ったもので，粒子性と波動性を合わせ持つものです．光子は電磁場の素励起であるというような言い方をすることもあります．電子にも対応する電子の場があります．弦理論とは，もう少し正確に述べるとこのような素励起が粒子的ではなく，1次元的に広がっている場合の理論であると言うことができます．このような弦を記述する一つの方法として，弦はその振動状態によって様々な粒子のように振る舞い，粒子は対応する場で記述できるわけですから，振動状態の一つ一つに対応する無限個の場を用いて表すということが考えられます．これらを**弦の成分場**と呼ぶことにし，その集合を象徴的に $\{\phi(x), A_\mu(x), \ldots\}$ と書いておきます．このような弦理論の記述法は**弦の場の理論**と呼ばれています．

6. 弦の場

このような記述法では，運動方程式は無限種類の場を用いた非線形な微分方程式で，弦が広がっていることに対応する非局所性から微分を無限個含むことになってしまいます．ここであきらめたくなってしまいそうですが，実は見通しを良くする方法があります．それを次のような簡単化したモデルで説明しましょう．

1次元運動をする自由粒子を量子力学的に考えるとき，位置の固有状態 $|x\rangle$ をヒルベルト空間の基底として選ぶことができます．また，1次元の調和振動子を量子力学的に考え，基底状態を $|0\rangle$，生成演算子を $a^\dagger$ とすると，$|0\rangle, a^\dagger|0\rangle, (a^\dagger)^2|0\rangle, \ldots$ をヒルベルト空間の基底として選ぶことができます．これらの2つのヒルベルト空間の直積を考えると，状態 $|\psi\rangle$ は

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_n(x)\, (a^\dagger)^n |0\,; x\rangle \quad (11)$$

のように展開できます．ここで自由粒子の $|x\rangle$ と調和振動子の $|0\rangle$ の直積を $|0\,; x\rangle$ と表しました．もしも自由粒子のヒルベルト空間と直積を取るのが調和振動子のヒルベルト空間ではなくてスピンのヒルベルト空間だったら，スピンという内部自由度を持つ粒子の波動関数になりますが，今回はちょっと変わった調和振動子的な内部自由度を持つ粒子ということになります．しかし，そのような解釈を考えることなく，この式を x の関数のセット $\{\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \ldots\}$ とある量子力学系の状態 $|\psi\rangle$ を1対1対応させるものと見なすことができます．

平坦な時空内を運動する弦の場合には，無限種類の調和振動子を内部自由度として持つ粒子と考えることができます．さきほどの例で調和振動子の生成演算子が無限種類ある場合をイメージして下さい．複雑にはなりますが，概念的にはさきほどと同じようにして，今回は弦の成分場のセット $\{\phi(x), A_\mu(x), \ldots\}$ をある状態 Ψ と1対1対応させることができます．このような状態 Ψ のことを**弦の場**と呼びます．ここでようやくこの記事のタイトルにある弦理論と等角写像の関係が出てきます．実はこのような弦の場は，2次元の共形場の

理論の状態になるのです*2)．

7. 弦の相互作用

次に弦の相互作用について考えてみましょう．図3は一つの粒子が2つになる場合と一つの弦が2つになる場合を模式的に比較したものです．粒子の場合は，粒子が伝播している部分と相互作用している部分の区別ははっきりしています．一方，弦の場合は弦が伝播している部分と相互作用している部分に明確な区別がありません．このことは，相互作用しない自由な弦の理論を選んで弦がどのように伝播するかをひとたび決めてしまうと，どのように相互作用しなければならないかが本質的に一意に決まってしまうということを意味します．弦の場の理論の立場でもう少し詳しく書くと，自由な弦の場の理論を矛盾なく構築するためには高いゲージ対称性が必要で，相互作用はそのゲージ対称性を尊重するように，という要請から決まってしまうということです．

Wittenは1986年にそのような要請を満たす相互作用の構成に成功しました[2]．その際，さきほど説明した弦の場 Ψ が用いられています．弦の場は2次元の共形場の理論の状態で，1次元に広がる線分上で定義されます．Wittenは，2つの弦の場 Ψ_1, Ψ_2 が与えられたときに，Ψ_1 を定義する線分の右半分と Ψ_2 を定義する線分の左半分をある種の内積で縮約し，残った Ψ_1 を定義する線分の左

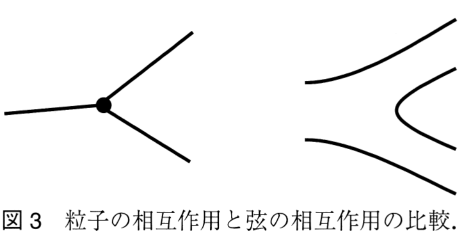


図3　粒子の相互作用と弦の相互作用の比較．

*2)　スピン系などの統計力学の模型や格子ゲージ理論などは，弦理論の研究を行う上で何か考え方の奥行きのようなものを与えてくれる大切な要素であると思います．文献1)は様々な統計力学の模型，格子ゲージ理論，弦理論のことが一冊の中に書かれているユニークな本で，修士課程の大学院生だったときに悪戦苦闘した記憶がありますが，いつかゆっくりと読み返してみたいと思っています．

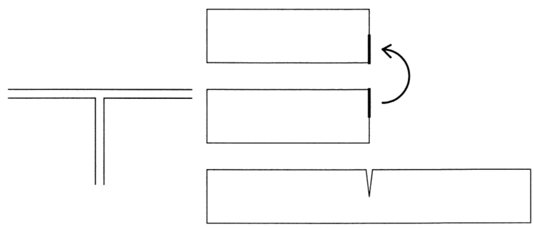


図4　弦の場の積．

半分と Ψ_2 を定義する線分の右半分をつなげてできる線分上に定義される状態を弦の場の積 $\Psi_1 * \Psi_2$ と定義しました．図4の左図の左下の折れ線上に Ψ_1 が定義されていて，右下の折れ線上に Ψ_2 が定義されていた場合，$\Psi_1 * \Psi_2$ は上側の線分上に定義されます．2つの状態を内積で縮約するというのは，量子力学でのブラとケットの縮約のようなものでなじみ深い操作です．今回の弦の場の内積の正確な定義は省略しますが，2次元の共形場の理論で標準的に使われるものです．例えば前に演算子と状態の間の1対1対応のことを説明しましたが，演算子 ϕ_1 に対応する状態と演算子 ϕ_2 に対応する状態との内積は，ϕ_1 と ϕ_2 を適切に共形変換したものの2点相関関数で与えられます．Wittenの弦の場の積の定義で面白い点は，この内積を状態を定義する線分全体ではなく，半分の領域に用いたところです．以前，状態を時間発展とのアナロジーで説明しましたが，そのような見方ではこの状態の積はずいぶん変わった操作です．長方形領域での左辺に初期条件を課し，右辺に状態が定義されるとします．図4の右側のようにそのような長方形を2つ用意し，1つ目の長方形の右辺の下半分と2つ目の長方形の右辺の上半分を貼り合わせます．すると切り込みが入った長方形ができますが，状態の積はこの切り込みの部分に定義されます．もしくは状態と演算子の1対1対応を用いて，図5のように対応する演算子を原点に挿入したときに半円の上半分に状態が定義されるように2つの状態 Ψ_1, Ψ_2 を用意したとします．このとき $\Psi_1 * \Psi_2$ は図5で太線で書いた Ψ_1 の半円の右半分と Ψ_2 の半円の左半分を貼り合わせることができれば得られます．

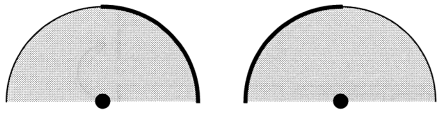


図5　半円の上で定義される2つの状態から，太線の部分を貼り合わせて状態の積を構成する．

このように弦の相互作用と伝播を組み合わせたものを共形場の理論を用いて表そうとすると一般には非常に複雑な領域になります．うまく共形変換をすれば，そのような複雑な領域も上半平面のような単純な領域に原理的には変換できるはずなのですが，そのような共形変換を実際に構成するのは一般的には至難の業です．

8. Schnablの解析解

しかし，何とかうまく座標変換をしてWittenの弦の場の積をもう少し簡単に表すことはできないでしょうか．図5では半円の右半分と半円の左半分を貼り合わせる必要がありましたが，この座標系での座標を z としたとき，実は逆三角関数 arctan を用いて

$$z' = \frac{2}{\pi} \arctan z \tag{12}$$

という座標変換をするとこの貼り合わせが簡単になります．図6の左の図に，座標系 z では図2の左図のような $|z|$ が一定の線，もしくは z の偏角が一定の線が，どのように変換されるかいくつかの例を図示しました．もとの座標系 z で状態が定義される半円の右半分は $z = e^{i\theta}$ の $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ですが，この領域は座標系 z' では $z' = 1/2 + iy'$ で $y' \geq 0$ という半直線に変換されます．また，座標系 z で $z = e^{i\theta}$ の $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ という領域は座標系 z' では $z' = -1/2 + iy'$ で $y' \geq 0$ という半直線に変換されます．そして座標系 z で $|z| \leq 1$ で $\Im z \geq 0$ で表される半円は座標系 z' では $-1/2 \leq \Re z' \leq 1/2$ で $\Im z' \geq 0$ というように表される帯状の領域に変換されます．これは図6の左図で示したように，2次元の座標系としてはずいぶん変わったものですが，図6の中央の図と右の図から分かるように，Wittenの弦の場の積を定義するときに貼り合わせるべき部分が半直線になっているので，この座標系で弦の場を用意しておけば，短冊を貼り合わせるように弦の場の積を構成することができます．そしてこのような弦の場の相互作用の表し方に基づき，2005年，SchnablがWittenの弦の場の理論の運動方程式の解析解の構成に成功しました[3]．Wittenが運動方程式を発表したのが1986年ですから，約20年経って初めて解析解が構成できたということになります．

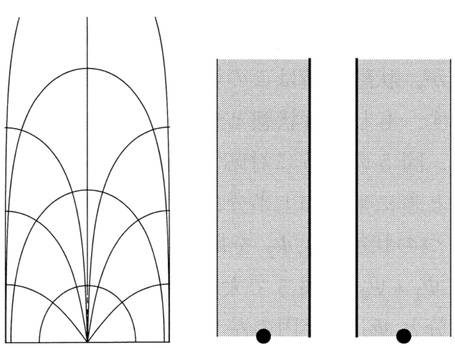


図6　arctan z を用いた座標系．

9. おわりに

弦の場の理論の運動方程式は，成分場で書くと無限個の場の非線形な微分方程式で微分を無限個含む複雑なものですが，その無限個の成分場を2次元の共形場の理論の状態として表し，さらに arctan z という等角写像を使って座標変換をすると弦の相互作用を視覚的に簡単に表すことができ，この表現法に基づいてその後も別な解析解が構成されたり，様々な進展が続いています．

今回は等角写像の具体的な利用法について書きましたが，弦理論と共形変換の関係は概念的にも重要です．弦の成分場は共形場の理論の状態を使って表すことができると書きましたが，運動方程式の解になっている弦の成分場の配位は，実は別の共形場の理論と対応しているはずで，運動方程式の解の集合と，共形場の理論の集合との間に対応関係があることが予想されています．このような対応関係のより深い理解は，現在私たちが知って

いる未完成な弦理論の背後にあるはずの理論の探求において，重要な知見を与えてくれるのではないかと期待されます．

参考文献

1) A.M. Polyakov, "Gauge Fields and Strings", (Contemporary Concepts in Physics Vol.3) Harwood Academic Publishers (1987).
2) E. Witten, "Noncommutative Geometry and String Field Theory", *Nucl. Phys.* **B268**, 253 (1986).
3) M. Schnabl, "Analytic solution for tachyon condensation in open string field theory", *Adv. Theor. Math. Phys.* **10**, 433–501 (2006). [hep-th/0511286].

（おおかわ・ゆうじ，東京大学大学院総合文化研究科）

ゲージ理論とリーマン面

細道　和夫

1. 序

修士 2 年生の頃，研究室の先輩だった奥山さんが修士論文[1)]にまとめられたゲージ理論とリーマン面の不思議な関係について，ご本人に大変丁寧に講義していただいたのを覚えている．Seiberg と Witten によって 1994 年に発見された，4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論の厳密解，いわゆる **SW 理論**の話である．当時の私には必要な数学も物理も難しすぎて，結局「よし，この話題には当分ふれないでおこう」というのが当時の結論だったと思い出される．

ところが，SW 理論のもとになった革新的な考え方は後に超弦理論の研究者を悩ませていた強結合相の問題に応用され，結果として超弦理論へのアプローチを一変させてしまった．その影響は最近の研究成果の中にも見ることができる．

本稿では理論物理学の一分野に大きな変革をもたらした Seiberg と Witten の業績[2)]を振り返り，その中でリーマン面の数学がどのように役立っているかを紹介する．また，そこから今日の理論的進展の基礎となるアイデアにも触れてゆきたいと思う．

2. リーマン面

1 次元の複素多様体はリーマン面と呼ばれ，理論物理・数理物理のいろいろな分野に登場する．ここでは 4 次元の超対称ゲージ理論の解析に必要な事柄を簡単にまとめる．

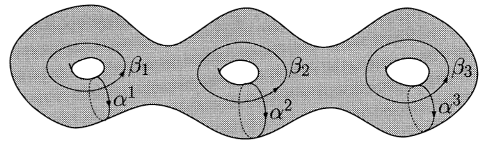


図 1　リーマン面（種数 3）と正準的な交点形式に従う 1 サイクルの例．

トーラスは，位相的には球面に把手を一つ付けたものと思える．**種数** g のリーマン面とは，同様にして球面に g 個の把手を付けて得られるリーマン面をいう．種数 g のリーマン面 Σ の上には図 1 のように，以下の交点数に従う $2g$ 個の 1 サイクル（閉曲線）の組 $\alpha^i, \beta_i\ (i=1,\cdots,g)$ を考えることができる．

$$\alpha^i \cap \alpha^j = 0, \quad \beta_i \cap \beta_j = 0, \\ \alpha^i \cap \beta_j = -\beta_j \cap \alpha^i = \delta^i_j. \tag{1}$$

任意の閉 1-形式の対 ω, χ について，次の双線形恒等式が成り立つ．

$$\int_\Sigma \omega \wedge \chi \\ = \sum_i \left(\int_{\alpha^i} \omega \int_{\beta_i} \chi - \int_{\beta_i} \omega \int_{\alpha^i} \chi \right). \tag{2}$$

$\lambda_1, \cdots, \lambda_g$ を g 個の独立な正則 1-形式の組とし，

$$\int_{\alpha^i} \lambda_j = e^i{}_j, \quad \int_{\beta_i} \lambda_j = h_{ij} \tag{3}$$

とする．面上の正則座標を z とすると，λ_i はみな

dz に比例するので $\lambda_i \wedge \lambda_j \equiv 0$ が従う．これと上の恒等式から，**周期行列**と呼ばれる以下の $g \times g$ 行列

$$\tau_{ij} \equiv h_{ik}(e^{-1})^k{}_j \tag{4}$$

が対称行列となることが示せる．また λ_i の複素共役を $\bar{\lambda}_i$ と書くと，

$$i \int_\Sigma \lambda_i \wedge \bar{\lambda}_j = i e^k{}_i \bar{e}^l{}_j (\bar{\tau}_{kl} - \tau_{kl}) \tag{5}$$

は $g \times g$ 行列として正定値となることから，行列 $\mathrm{Im}\tau_{ij}$ は正定値となる．

さて，ゲージ理論の物理で重要になるのは，g 個の正則パラメータ $u_1, \cdots, u_g$ に依存して形を変化させる種数 g のリーマン面の族である．さらに，各々のリーマン面 Σ_u はある有理 1-形式 λ を持ち，その u_i 微分から Σ_u 上の g 個の正則 1-形式が得られるとする．

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_i} = \lambda_i + (\text{完全形式}). \tag{6}$$

ゲージ理論への応用の際はこの λ は **SW 微分**と呼ばれる．

リーマン面の族をラベルするパラメータの取り方には任意性がある．そのうち特別なものとして，以下の $2g$ 個の関数を導入する．

$$a^i = \int_{\alpha^i} \lambda, \quad a_{\mathrm{D},i} = \int_{\beta_i} \lambda. \tag{7}$$

このうち a^i をリーマン面の族のパラメータとすると，周期行列の対称性から

$$\tau_{ij} = \frac{\partial a_{\mathrm{D},i}}{\partial a^j} = \frac{\partial a_{\mathrm{D},j}}{\partial a^i} \tag{8}$$

が導かれる．この式から，$a_{\mathrm{D},i}$ が局所的にはある関数 $F(a^i)$ の微分と表されることが分かる．

$$a_{\mathrm{D},i} = \frac{\partial F}{\partial a^i}. \tag{9}$$

この関数 $F(a^i)$ は後に登場する，ゲージ理論の**プレポテンシャル**に相当する．

3. $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論

Seiberg と Witten は 1994 年に，上のリーマン面の道具立てを使ってある特殊なゲージ理論の強結合相の物理が厳密に理解できることを発見した．ここでは彼らの注目した理論—$\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論—をまとめよう．

場の理論のスピン–統計の定理によって，Bose 粒子は整数スピン，Fermi 粒子は半奇数スピンを持つ．超対称性はスピンが 1/2 異なる Bose 粒子と Fermi 粒子を関係づける対称性で，理論物理学のいろいろな側面から注目されている．$\mathcal{N} = 2$，すなわち最小単位の 2 倍の超対称性があるときは，スピンが 1 離れた粒子が一つの多重項に含まれるので，スピン 1 のベクトル粒子とスピン 0 のスカラー粒子の振舞いに関係性が成り立つ．

$\mathcal{N} = 2$ 超対称 Yang–Mills 理論（SYM 理論）と呼ばれる模型は，ゲージ粒子とその相棒の Fermi 粒子，およびゲージ群の随伴表現に属する Higgs 粒子で構成される．具体的な議論のためゲージ群を $SU(n)$ に選ぶと，Higgs 粒子を表すスカラー場は複素 $n \times n$ 行列に値をとり，その対角和は零である．この模型に物質場を導入することもできるが，本稿では議論しない．

Fermi 粒子の寄与を省略すると，高エネルギーの粒子の運動は次のラグランジアンで記述される．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}F_{mn}^2 - \frac{\theta}{32\pi^2}\mathrm{Tr}(F_{mn}\tilde{F}^{mn}) - \frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left(2D_m\bar{\phi}D^m\phi + [\phi, \bar{\phi}]^2\right), \tag{10}$$

ただし $\tilde{F}^{mn} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{mnkl}F_{kl}$ は F_{mn} の Hodge 双対を表す．第 2 項はゲージ場のインスタントン数を測る全微分項で，量子論では重要な役割をもつ．

3.1 縮退した真空

Higgs 場 ϕ は非零の真空期待値を取ることによってゲージ対称性の破れを引き起こし，ラグランジアンの第 3 項，第 4 項に従って粒子の質量の源となる（**Higgs 機構**）．

さて，素粒子の標準模型においては，Higgs 粒子のポテンシャルはゲージ対称性を除いてただ一つの極小点を持つというのが通常の仮定である．一方，SYM 理論の Higgs 場 ϕ のポテンシャルは，ϕ と $\bar{\phi}$ が交換するとき最小値 0 をとる．そのよ

うな ϕ はゲージ対称性を利用すると対角行列とできるが，対角行列なら何でもよい．その成分を $a_1, \cdots, a_n$ と書くと，これらを座標とする縮退した真空の集まり＝**モジュライ空間**を考えることができる．ϕ の対角和が零なので，$SU(n)$ SYM 理論の真空のモジュライ空間は複素 $n-1$ 次元である．

場の理論や超弦理論の模型の多くは縮退した真空のモジュライ空間をもつ．このような理論を調べる際には，いろいろな物理量をモジュライ空間上の関数として捉える考え方が有効である．とくに正則性に従う物理量については，わずかな情報からモジュライ空間全体での関数形が決まる場合がある．

3.2 低エネルギー有効作用

モジュライ空間の一般の点ではゲージ対称性は Higgs 機構で $U(1)^{n-1}$ に破れるので，$n-1$ 個の電磁場が零質量に残る．これらはモジュライ空間の $n-1$ 個の座標とそれぞれ対をなす．これらの質量を持たない粒子たちを精度よく記述する低エネルギー有効理論を“モジュライ空間上の関数として”求める問題を考えよう．

有効ラグランジアンは超対称性から，以下の形を取る．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\tau_{ij}\left(\partial_m a^i \partial^m \bar{a}^j + \frac{1}{4}F^i_{mn}F^{j,mn}\right) - \frac{1}{8\pi}\mathrm{Re}\tau_{ij}F^i_{mn}\tilde{F}^{j,mn}. \tag{11}$$

ただし i, j は 1 から $n-1$ までを走るとした．$\mathrm{Im}\tau_{ij}$ は隣り合う真空の間の距離を測る，モジュライ空間上の計量と見なせる．

興味深いことに，係数 $\tau_{ij}(a)$ は超対称性からプレポテンシャルと呼ばれる a_k の正則関数 $F(a^i)$ の 2 階微分と書けることが示せる．

$$\tau_{ij} = \frac{\partial^2 F(a)}{\partial a^i \partial a^j}. \tag{12}$$

この時点で，$U(1)^{n-1}$ をゲージ群とする $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論と種数 $n-1$ のリーマン面が何らかの対応関係にあることが期待される．

問題は各々の真空について，(10) のラグランジアンを出発点に Higgs 機構で重くなった粒子を積分し，F を計算することである．重くなった粒子の及ぼす量子効果はゲージ相互作用が強いほど大きくなると予想される．

量子論的な考察を始めるにあたって，結合定数 g は量子論的には実は定数ではなく，対象とする現象のエネルギースケール μ に応じて変わることに注意する．SYM 理論は**漸近自由**，つまり $g(\mu)$ は高エネルギーに行くほど小さくなる．理論を特徴づける良いパラメータは従って結合定数 g そのものではなく，g のスケール依存性

$$\Lambda^{2N} \approx \mu^{2N} \exp\left(-\frac{8\pi^2}{g^2(\mu)} + i\theta\right) \tag{13}$$

から決まるエネルギースケール Λ である．また単位インスタントンあたりの作用積分を S_{inst} とすると，右辺の指数関数は $e^{-S_{\mathrm{inst}}}$ に一致するので，いろいろな物理量へのインスタントン補正は Λ^{2N} のべきで現れる．

Higgs 機構の起こるスケールを象徴的に a と書くと，$\mu \le a$ では軽い粒子はすべて中性なので結合定数の変化が止まる（図 2）．従って a を Λ より充分大きく設定すると量子補正は小さい．プレポテンシャルはこの近似で

$$F \sim -\sum_{i<j} \frac{(a_i - a_j)^2}{4\pi i} \ln\left(\frac{a_i - a_j}{\Lambda}\right)^2 \tag{14}$$

となる．

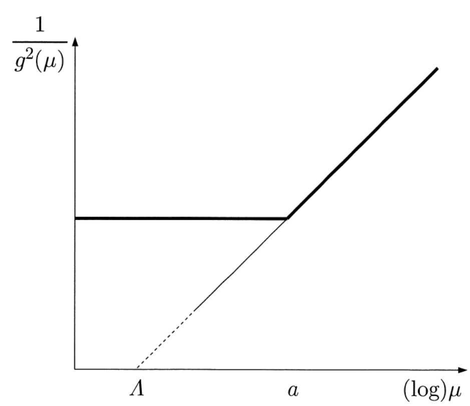


図 2　SYM 理論の結合定数のエネルギー依存性．Higgs 機構の起こるスケール以下では結合定数の変化は止まる．

逆に $a \ll \Lambda$ の場合はゲージ理論の相互作用の効果が大きくなる．とくにモジュライ空間の計量が正定値となるためには，上の F はインスタントンによって大きな補正を受けることが必要となる．

3.3 BPS 質量公式

ゲージ理論の結合定数 τ_{ij} とリーマン面の周期行列の類似性について既にふれた．実は重い荷電粒子の振舞いを調べると，ゲージ理論とリーマン面の幾何学の間にさらなる関係性を見出すことができる．

粒子の電荷・磁荷はその粒子を囲む球面 S^2 上でゲージ場の強さを積分して定義できる．低エネルギー有効理論には零質量の電磁場が $g = n-1$ 個存在するので，g 対の電荷・磁荷が定義される．$F^j = \frac{1}{2}F^i_{mn}\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n$ と略記すると

$$\begin{aligned} e_i &= \frac{1}{2\pi}\int_{S^2}\left(\mathrm{Im}\tau_{ij}\tilde{F}^j - \mathrm{Re}\tau_{ij}F^j\right), \\ m^i &= \frac{1}{2\pi}\int_{S^2} F^i. \end{aligned} \tag{15}$$

電荷・磁荷を同時に担った粒子は**ダイオン**と呼ばれる．電荷・磁荷 (e_i, m^i) および $(\hat{e}_i, \hat{m}^i)$ を持った2つのダイオンが量子論的に矛盾なく共存するためには，**Dirac の量子化条件**

$$e_i\hat{m}^i - m^i\hat{e}_i \in \mathbb{Z} \tag{16}$$

が満たされている必要がある．以下では電荷 e_i・磁荷 m^i の値は整数とする．

ダイオンの質量には BPS 下限と呼ばれる限界値があり，その値は超対称性から $M = \sqrt{2}|Z|$ と書けることが知られている．

$$Z \equiv e_i a^i + m^i a_{\mathrm{D},i}\,; \quad a_{\mathrm{D},i} \equiv \frac{\partial F}{\partial a^i}. \tag{17}$$

ただし Z は超対称性代数の**中心電荷**と呼ばれる保存量である．この式を (7) と比較すると，電荷・磁荷 (e_i, m^i) を持つダイオンはリーマン面上のサイクル $e_i\alpha^i + m^i\beta_i$ に対応し，SW 微分 λ はその中心電荷を測る 1-形式と考えられる．

3.4 電気磁気双対性

$2g$ 個の保存量 (e_i, m^i) のどれを電荷，磁荷と見なすかには実は任意性がある．電磁気学においては，荷電粒子の寄与を除いた運動方程式は電場と磁場の入れ替えの下で対称なことがよく知られており，電気磁気双対性と呼ばれる．同様に，有効理論 (11) から従う g 個の電磁場の運動方程式は

$$\mathrm{d}F^i = \mathrm{d}\left(\mathrm{Im}\tau_{ij}\tilde{F}^j - \mathrm{Re}\tau_{ij}F^j\right) = 0 \tag{18}$$

と，$2g$ 個の同じ形の方程式で与えられるので，$2g$ 次元の任意の線形変換を対称性として持つ．

双対性変換は電荷・磁荷の組 (e_i, m^i) に

$$\begin{pmatrix} -m' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -m \\ e \end{pmatrix} \tag{19}$$

と作用する．これが電荷・磁荷の整数性と Dirac の量子化条件を保つとしよう．右辺の行列を S と書くと，S は $Sp(2g, \mathbb{Z})$ の元でなければならない．

$$S^T\Omega S = \Omega; \quad \Omega \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

中心電荷がこの変換の下で不変であることから $a^i, a_{\mathrm{D},i}$ およびゲージ結合定数の変換性が決まる．

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a' \\ a'_{\mathrm{D}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a_{\mathrm{D}} \end{pmatrix}, \\ &\tau' = (C + D\tau)(A + B\tau)^{-1}. \end{aligned} \tag{21}$$

この式を (7) と比較すると，双対性変換はリーマン面上で交点形式 (1) に従う 1-サイクルの基底 α^i, β_i の取り替えに対応することが分かる．

4. Seiberg–Witten の厳密解

ゲージ理論とリーマン面の対応を用いると，SYM 理論の低エネルギー有効理論が以下のようにして決定できるはずである．

1. SYM 理論の真空のモジュライに依存して形を変える適切なリーマン面（= **SW 曲線**），およびその上の SW 微分を見出す．

2. a^i および $a_{\mathrm{D},i} = \partial_{a^i}F$ をモジュライの関数として求め，最終的に $F(a^i)$ を求める．

以下，この処方箋に従って見出された $SU(2)$ SYM

理論の厳密解を詳しく見ていくことにする．

4.1 SW 曲線と SW 微分

$SU(2)$ SYM 理論の真空においては Higgs 場 ϕ は 2×2 対角行列としてよい．さらに残ったゲージ対称性を用いて対角成分の符号を反転することができるので，モジュライ空間のゲージ不変な座標として以下が用いられる．

$$u = \langle \mathrm{Tr}\phi^2 \rangle. \tag{22}$$

ϕ の対角成分の値は $\pm\sqrt{u/2}$ である．

この理論の厳密解を与える SW 曲線と微分は，

$$\begin{aligned} y^2 &= (x^2-u)^2 - \Lambda^4 \\ &= (x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)(x-e_4), \\ \lambda &= \frac{x^2 dx}{\sqrt{2}\pi i y} \end{aligned} \tag{23}$$

である．SW 曲線の式は 4 つの分岐点 $e_1, \cdots, e_4$ を除く任意の x に対して 2 通りの y の値を与えるので，x 平面の 2 重被覆である．分岐点の位置は次で与えられる．

$$\begin{aligned} e_1 &= -\sqrt{u+\Lambda^2}, & e_3 &= \sqrt{u-\Lambda^2}, \\ e_2 &= -\sqrt{u-\Lambda^2}, & e_4 &= \sqrt{u+\Lambda^2}. \end{aligned} \tag{24}$$

図 3 は弱結合領域 $0 < \Lambda^2 \ll u$ を仮定して x 平面上の分岐点の位置を示している．分岐点をつなぐ 2 本の切れ込み (例えば $[e_1, e_2]$ および $[e_3, e_4]$) に沿って 2 枚の x 平面を繋ぎ合わせると種数 1 のリーマン面が得られる．

図 3 のようにサイクル α, β を取り，それらに沿った λ の周回積分を a および a_{D} とすると，$0 < \Lambda^2 \ll u$ のとき近似的に

$$\begin{aligned} a &= \int_\alpha \lambda \ \approx\ \sqrt{u/2}, \\ a_{\mathrm{D}} &= \int_\beta \lambda \ \approx\ \frac{i\sqrt{2u}}{\pi} \ln\left(\frac{u}{\Lambda^2}\right) \end{aligned} \tag{25}$$

となる．$U(1)$ 電荷 ± 2 を持つ W-ボソンなどの質量 $M_{2\alpha}$ および単位磁荷を持つ 't Hooft–Polyakov モノポールの質量 M_β は

$$M_{2\alpha} = 2\sqrt{u}, \quad M_\beta = \frac{8\pi}{g^2}\sqrt{u} \tag{26}$$

となるが，これらは弱結合の近似で BPS 質量公式から正しく再現されることが分かる．

4.2 特異点とモノドロミー

量子論的なモジュライ空間には $u = \infty$ の他に 2 つの特異点 $u = \pm\Lambda^2$ がある．どちらも 4 つの分岐点のうち 2 つが衝突し，その結果，長さ零のサイクルを生じることで特徴づけられる．

古典的には W 粒子など，Higgs 機構で重くなる荷電粒子の質量は $2\sqrt{u}$ で与えられる．それらの質量はモジュライ空間の原点 $u = 0$ で零となり，そこで $SU(2)$ 対称性が回復するのを思い出そう．従って荷電粒子の中心電荷の係数を a と書くと，

$$a = \sqrt{u/2} = (\phi \text{ の対角成分}) \tag{27}$$

が古典論では正しい．しかし一旦量子効果を考慮に入れると，モジュライ空間の計量の正定値性を保つにはこの式が強結合領域 $|u| \ll \Lambda^2$ で大きな変更を受けることは避けられない．

厳密解から定まる関数 $a(u)$ は実際にこの性質を示す．そればかりか，$a(u)$ は特異点 $u = \pm\Lambda^2$ のまわりで，もはや 1 価関数でもなく，非自明なモノドロミーに従う．

特異点 $u = \Lambda^2$ においては $e_2 = e_3$ となるので，サイクル β が長さ零に退化する．従って $a_{\mathrm{D}} = 0$ となり，BPS モノポールが零質量となる．弱結合領域ではモノポールが W 粒子よりはるかに重いことと比べると，ちょうど逆の状況になっていることに注意しよう．さて，u を Λ^2 のまわりに反時計方向に 1 周したとき，関数 $a(u)$ は次のモノ

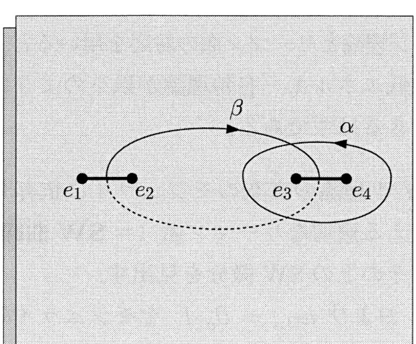


図 3　$SU(2)$ SYM 理論の厳密解を与えるリーマン面．

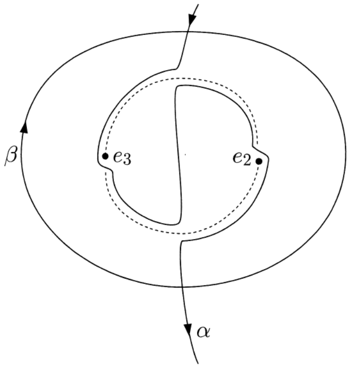


図 4　特異点 $u = \Lambda^2$ まわりのモノドロミーを示すサイクル α の変形.

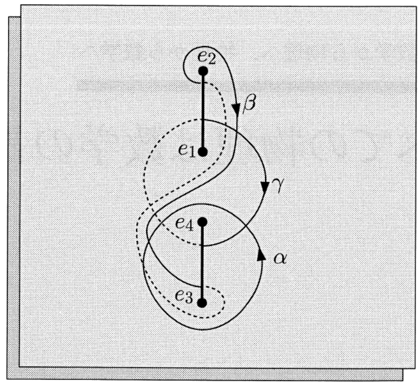


図 5　特異点 $u = -\Lambda^2$ 近傍でのサイクル α, β と退化サイクル γ.

ドロミーに従う.

$$a(u') = a(u) - a_{\mathrm{D}}(u)$$
$$\left(u = \Lambda^2 + \varepsilon, \quad u' = \Lambda^2 + \varepsilon e^{2\pi i}\right). \qquad (28)$$

これは u の値が Λ^2 のまわりを 1 周するにつれ，分岐点 e_2, e_3 が原点を中心に 180 度回転して入れ替わるため，サイクル α がこれを避けて図 4 のように変形されることからも理解できる．

モジュライ空間上のもう一つの特異点 $u = -\Lambda^2$ においては分岐点 e_1, e_4 が一致する．このとき生じる長さ零のサイクルは $\gamma \equiv 2\alpha - \beta$ なので，電荷・磁荷 $(2, -1)$ をもったダイオンが零質量になる（図 5)．

計量の正値性など量子論的な無矛盾性のためには，互いに非可換なモノドロミーをもつ 3 つの特異点の存在が重要で，これこそが厳密解の本質ということができる．

5. 発展問題

リーマン面を用いた厳密解の構成法は，ゲージ群を変えたり物質場を導入したりして他の様々な理論に適用されている．例えば $SU(n)$ SYM 理論の厳密解を書き下すには，まず多項式 $P(x)$ を

$$P(x) \equiv \langle \det(x - \phi) \rangle = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i) \quad (29)$$

と定義し，種数 $n-1$ の SW 曲線と微分を

$$w + \frac{\Lambda^{2n}}{w} = 2P(x), \quad \lambda = \frac{x\,dw}{2\pi i w} \qquad (30)$$

で与える．リーマン面の代わりに 3 次元 Calabi–Yau 多様体を用いるとさらに多様なゲージ理論の厳密解を統一的に記述できることも見つかっており，**SW 幾何**と呼ばれる．

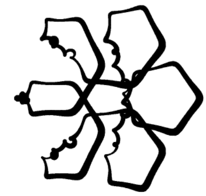
ゲージ理論の重要な情報を集約した SW 曲線そのものには物理的意味は何だろうか．実は 4 次元ゲージ理論を超弦理論や M 理論に埋め込んでみると，リーマン面を用いた厳密解法は異なる超弦理論の間の等価性（双対性）から自然に従うことが分かる．このような物理学と幾何学の対応関係は，超弦理論においては今後もさらに見つかっていくのではないかと期待される．

参考文献

1) 奥山和美著，“超対称ゲージ理論の双対性”，素粒子論研究 **93(1)**, 1–103, 1996-04-20.
2) N. Seiberg and E. Witten, *Nucl. Phys. B* **426**, 19 (1994) [Erratum-ibid. *B* **430**, 485 (1994)]; *Nucl. Phys. B* **431**, 484 (1994).

（ほそみち・かずお，京都大学基礎物理学研究所）

すべての物理は数学の言葉で記述できるのだろうか



村山　斉

私が働く数物連携宇宙研究機構では，数学者，物理学者，天文学者が宇宙の神秘を解き明かそうと同じ屋根の下で研究をしています．しかし，それぞれの考え方の違いにはいつも驚かされます．

いわゆる業界ジョークで，こういうものがあります．「天文学者，物理学者，数学者がスコットランドで一緒に電車に乗っていた．天文学者が窓から外を眺めて，野原に黒い羊が一匹いるのを見て，『なんと，スコットランドの羊は黒いのか！』と叫んだ．『いや違う』と物理学者が答える．『スコットランドの羊の一部が黒いということだよ.』すると数学者は道連れの二人のでたらめな思考に目を剥いてたしなめた．『スコットランドには，羊が少なくとも一匹存在し，その少なくとも一つの側面は，この位置から見ると黒く見える，ということじゃないか』.」

このように，数学者は完全な厳密さを要求します．公理に基づいて理論的に整合性のある体系を築き，その豊かさと美しさを尊ぶ，極めて純粋な学問です．バートランド・ラッセルは次のように書きました．「数学とは，きちんと見てみると，真理だけではなく彫刻のような至上の冷たく厳粛な美を持っており，私たち人間本来の弱さに訴えることも，絵画や音楽のような華やかさにとらわれることもなく，高潔な純粋さを保ち，しかも最高の美術品だけが持ち得る厳しい完璧さを持っている．嬉しさと喜びの真の精神，人類を超える存在である感触は，最高の価値の試金石であり，これは詩と同じく数学の中に見つけることができる.」ですから，数学は自然科学ではなく，いわば人工物が上り詰めた芸術品だということになります．

一方，物理学は「物」の「理（ことわり）」という文字通り，限りあるちっぽけな人間が奥深い自然の仕組みを理解しようとする，全く不遜な学問です．物理学者は，実験・観測にかかる多様で不可思議な現象を見て，いつも頭をかきむしっていますが，自然が論理的な法則に従うことも，それを人間が理解できることも，全く保証はありません．それでも「群盲象をなでる」ような努力を繰り返して，時々進歩があるわけです．アインシュタインは「そもそも世界が理解可能であることこそが永遠の謎だ.」と言います．その通りだと思います．

そこで，数学が物理学にとって必要であることは，過去の巨人たちが繰り返し強調していることです．

近代科学の祖ガリレオ・ガリレイは，物理と数学の関係について有名な言葉を残しています[1]．「私たちの目の前に果てしなく広がる大きな書物—つまり宇宙—には，真理が書き込まれている．だが，まずこの書物で使われている言語と文字を勉強しないと，この書物を理解することはできない．こ

の書物は数学の言葉で書かれていて，使われている文字は三角形，円，その他の幾何学的な図形であり，これがないと人間はこの書物の一文字も理解することはできず，暗い迷路にさまよってしまうことになる.」

逆説的ですが，私は数学は日常と関係なく，抽象的に作られた言葉であるからこそ，自然を記述する物理学に役に立つのだと思います.

人間の言葉は日頃の経験から生まれたものなので，目にしたことのないような現象を記述する言葉がありません．ミクロな世界では，粒粒のはずの電子が広がって波のように振る舞って，空間の隅々を通った後，検出器に当たると粒に戻って場所が決まる，という日頃の経験からかけ離れたことが起きます．人間はこれを記述するのに必要な言葉を持っていません．しかし数学は抽象的に作られているために，日常的には考えられない虚数（いかにもありそうもないことを示す名前）を含めた複素数の研究を進め，また直交多項式のような関数の分類を行い，順番によって答えが違うという変なかけ算を考え，体系化してきました．それが「たまたま」ミクロな世界を記述する量子力学という理論を作るので必要だったのです.

また，重力によって光が曲げられるのは，光が真っ直ぐ進んでいるつもりでも，空間が曲がっているためだと考えるのが相対性理論ですが，曲がっている時間と空間を「外から」見ずに「中だけで」記述する微分幾何学がなければ，そもそも話を始めることもできません.

そして本特集で触れられているように，自然界の力や物質，その統一理論，そしてそれが集まった多体系を考えるにはさらに高度な数学が次々と役に立って来ているのです.

物理学はその目的のため，どうしても定量的で矛盾のない言葉が必要です．それはやはり数学でしかあり得ません．もし自然が論理的な法則に従い，それを人類が理解できるのだとしたら，それは数学に頼ることになります．むしろ不思議なのは，アインシュタインの言う通り，自然が人間に理解を許している，ということのほうでしょう．そしてそのために必要な言葉をさらに開発するように，数学者にも刺激と研究の動機を与えていくのでしょう.

ウィグナーは「自然科学への数学の不可思議な有用性について」という文章を書いていて[2]，こう締めくくっています．「物理法則を定式化するときに数学が適切であるという奇跡は，人類が理解することはできない，身のほどを超えたすばらしい贈り物でだ．このことには感謝の心を持ち，これからもそうであり続けることを望み，良いとか悪いとかではなく，どんなに不思議なことでもあっても，学問の様々な分野にさらに広がっていくことを喜びとして期待しよう.」

物理学者は羊の片側だけを見て，向こう側を予測しながら，他の羊を見つけることができなくても，法則を暗中模索していきます．その中で，これからも数学が物理学の言葉として活躍するのは間違いないでしょう．もちろん，自然が今まで通り人間に親切であってくれるのなら，というただし書き付きで.

参考文献

1) G. Galileo, *Il Saggiatore* (1623)（山田慶兒，谷泰訳，高橋憲一解説『偽金鑑識官』中央公論新社（2009)).

2) E.P. Wigner, "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", in *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol.**13**, No.I (February, 1960). New York: John Wiley & Sons, Inc.

（むらやま・ひとし，東京大学数物連携宇宙研究機構，カリフォルニア大学バークレー校）

体積予想と量子場の理論

藤　博之

1. はじめに

数理物理学研究では，量子場の理論の物理量と多様体の位相不変量等との間の関係を探ることで，双方の理論に有益なフィードバックをもたらすことがある．体積予想[1)]の研究では3次元Chern–Simonsゲージ理論と双曲幾何学とが結びつき，さらに最近の研究では，位相的弦理論[2)]や3次元超対称場の理論の双対性[3)]に興味深い結果をもたらしている．本稿では，物理側の視点から体積予想を紹介したい．

2. 結び目補空間と双曲多様体の体積

体積予想とは，Kashaevによって発見され，村上2氏によって提唱された，色付きJones多項式 $J_n(K;q)$ の漸近的振舞いに関する予想[1, 4)]：

$$2\pi \lim_{n\to\infty} \frac{\log J_n(K; e^{\frac{2\pi i}{n}})}{n} = \mathrm{Vol}(\mathbf{S}^3\backslash K) + i\mathrm{CS}(\mathbf{S}^3\backslash K)$$

であり，その漸近値は，結び目 K の補空間 $\mathbf{S}^3\backslash K$ の体積とChern–Simons不変量を表している．本節ではまず双曲多様体の体積と色つきJones多項式に関して概観してみよう．

2.1 双曲多様体と理想四面体

双曲多様体とは，完備な負の定曲率空間であり，計量 g_{ij} と曲率 R_{ij} は

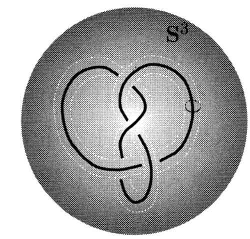


図1　8の字結び目のチューブ近傍と理想四面体．

$$R_{ij} = -2g_{ij} \tag{1}$$

という関係を満たす．一方，3次元球面内の結び目に対し，図1に描かれたようなチューブ近傍を引き抜いて得られる境界付き多様体には，双曲多様体の条件(1)を満たすものが存在し，**双曲結び目**と呼ばれる．

一般に，3次元多様体が双曲多様体の条件を満たす時，**理想四面体**による単体分割が可能となる[5)]．この理想四面体は，(1)を満たす双曲計量 g_{ij} を持つ3次元ボールの境界球面上に4つの頂点を持ち，それらを g_{ij} に関する測地線で繋いだものとして定義され，3つの面角 α, β, γ によって形が指定される．実際には3つの面角の和は π であるので，図2のような複素平面内の三角形を考えれば，三角形の頂点を表す複素座標 z によって形が指定される．

この理想四面体の体積 $\mathrm{Vol}(T_{\alpha,\beta,\gamma})$ は，負の定曲率計量 g_{ij} から作られる微小体積要素を積分して計算すると，以下の公式で与えられる[5)]：

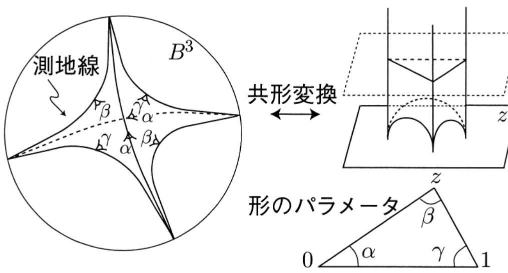


図 2　理想四面体と形のパラメータ．

$$\mathrm{Vol}(T_{\alpha,\beta,\gamma}) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma). \quad (2)$$

ここで，$\Lambda(\theta)$ は Lobachevsky 関数と呼ばれ，以下のように定義される：

$$\Lambda(\theta) = -\int_0^\theta \log|2\sin t|dt.$$

この公式の興味深い点は，理想四面体の体積が面角だけから決定される点であり，双曲空間 $\mathbf{H}^3$ の特徴を反映している．

2.2 8 の字結び目の単体分割と体積

では，具体的に 8 の字結び目の補空間を例にとって，双曲多様体の理想四面体による単体分割の条件を見てみることにしよう[6]．図 3 のように 8 の字結び目を境界とする膜を張り，2 箇所に切り込みを入れると 4 つの領域に分割される．さらに，結び目を頂点に押し込めるように各領域を三角形に変形すると，四面体の四面が得られる．$\mathbf{R}^3$ をこの膜で 2 つに分断すれば，2 つの四面体でそれぞれの領域を囲めるので，$\mathbf{S}^3$ 内の 8 の字結び目の補空間がこれらの四面体で単体分割されることが分かる．

この単体分割では，結び目は各四面体の頂点に局在しているので，補空間の境界トーラスは 2 つの四面体の頂点を切り落として現れる 8 つの小さな三角形を張り合わせて実現され，境界のトーラ

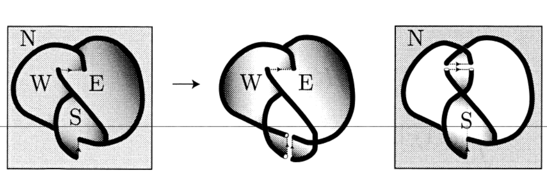


図 3　8 の字結び目補空間の単体分割．

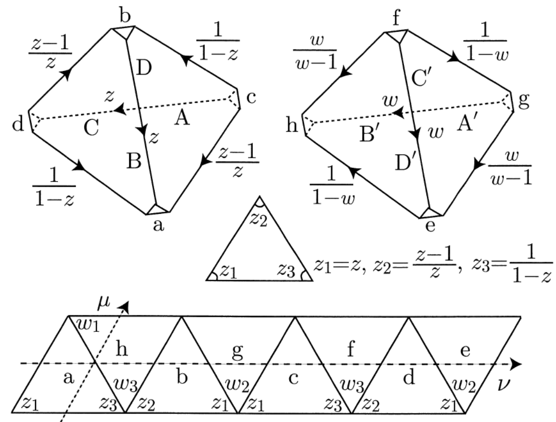


図 4　8 の字結び目補空間境界トーラスの展開図．

スの展開図は図 4 のようになる．ここで，面角の定まった理想四面体による単体分割を実行するには，四面体や境界三角形の貼り合わせに欠損角が生じないための条件：

$$z(z-1)w(w-1) = 1,$$
$$\left(\frac{z}{w}\right)^2 = 1, \quad w(1-z) = 1$$

を形のパラメータ z, w が満たさなければならない．これらの条件式に対する解の中で，すべての面角が正のものはただ一つ存在し，$z = w = e^{\frac{\pi i}{3}}$ となる．このように理想四面体が無矛盾に貼り合う条件から，面角が一意的に決定されることが分かった．この結果は 8 の字結び目に特有の現象ではなく，一般に Mostow の剛性定理により保障された双曲多様体の性質である．

理想四面体の面角が決まったので，(2) の体積公式に面角を代入すると，

$$\mathrm{Vol}(\mathbf{S}^3 \backslash \mathbf{4_1}) = 6\Lambda(\pi/3) = 2.0298832... \quad (3)$$

となり，8 の字結び目の双曲的計量に関する体積が一意的に決定される．以上の単体分割の考察を通じて，双曲多様体では体積自体が幾何的不変量であることを見ることができた．

2.3 色付き Jones 多項式と体積予想

次に，体積予想の主張を見てみよう．結び目を分類する上で，結び目不変量は極めて重要な役割を果たす．ここで言う結び目の同値性とは，図 5

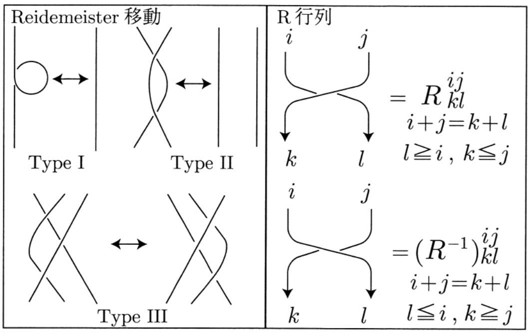


図 5 Reidemeister 移動と R 行列.

左の Reidemeister 移動 I-III の下での等価性であり，結び目不変量はこれらの変形の下で不変であることが要請される．例えば**色付き Jones 多項式** $J_n(K;q)$ は，リー環 sl_2 の n 次元既約表現を基に定義される量子群の R 行列を図 5 右のルールで，結び目の各交差に充て，添え字に関する和を取ることで計算される．実際 R 行列の Yang–Baxter 関係式から Reidemeister 移動の下で不変であることも示される．

具体的に R 行列を組み合わせて計算を実行すると，8 の字結び目に対する色付き Jones 多項式の表式は[7]，

$$J_n(\mathbf{4_1};q) = \sum_{k=0}^{n-1}\prod_{j=1}^{k}(q^{(n+j)/2} - q^{-(n+j)/2}) \times (q^{(n-j)/2} - q^{-(n-j)/2}) \quad (4)$$

と得られる．上式を $q = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ に特殊化し，漸近極限 $n \to \infty$ での値を評価すると

$$2\pi \lim_{n\to\infty} \frac{\log J_n(\mathbf{4_1}; e^{\frac{2\pi i}{n}})}{n} = 6\Lambda(\pi/3)$$

という漸近値が得られ，8 の字結び目の補空間の体積 (3) と一致していることが分かる．ここで，8 の字結び目の補空間の Chern–Simons 不変量が零であることから，8 の字結び目に対して体積予想が成立していることが確かめられた．

体積予想は具体的な結び目に対しては証明されているが，すべての双曲結び目に対する証明は得られていない．次節では，結び目不変量の物理的解釈と体積予想の物理的導出について概観しよう．

3. Chern–Simons ゲージ理論と体積予想

3.1 Wilson ループ演算子と結び目不変量

Jones 多項式をはじめとする**量子不変量**は，量子場の理論として理解されることが 1989 年の Witten による研究[8]で明らかとなった．彼の用いた量子場の理論は 3 次元 **Chern–Simons ゲージ理論**であり，以下のような作用 $I_{\rm CS}$ を持つ：

$$I_{CS} = \frac{k}{4\pi i}\int_{M_3} \mathrm{Tr}\left[A\wedge dA + \frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right].$$

ここで，A はゲージ群 G のゲージ場を表している．Chern–Simons ゲージ理論の物理量として，**Wilson ループ演算子**を導入しよう．Wilson ループ演算子とは，3 次元多様体 M_3 内の結び目 K に沿った経路順序積 P を用いて次のように定義される：

$$W_R(K) = \mathrm{Tr}_R \mathrm{P}\exp\left[\oint_K A\right].$$

ここで，R はゲージ群 G の表現を表し，この表現に関してトレースを取っている．

Witten は，3 次元球面 $\mathbf{S}^3$ 内の Wilson ループ演算子の量子的期待値 $Z(\mathbf{S}^3;K_R) := \langle W_R(K)\rangle_{\mathbf{S}^3}$ が量子不変量を与えると主張した．特に，ゲージ群 G を $SU(2)$，表現 R を n 次元既約表現 $[n]$ に選ぶと，Wilson ループ演算子の期待値は色付き Jones 多項式と以下の関係にある：

$$J_n(K;q) = \frac{Z(\mathbf{S}^3;K_{[n]})}{Z(\mathbf{S}^3;U_{[n]})}.$$

U は自明な結び目を表し，Chern–Simons ゲージ理論の結合定数 k は $q = \exp\left(\frac{2\pi i}{k+2}\right)$ と同定した．

Chern–Simons ゲージ理論の分配関数や Wilson ループ演算子の期待値は，顕著な位相的性質を有する．具体的には 3 次元多様体 M_3 を 2 次元面 Σ を境界として図 6 左のように分割すると，下記の関係が満たされる：

$$Z(M_3;K_{\{R_i\}},K_{\{R_j\}}) = \int [dA_\Sigma] Z(M_3^{(1)};K_{\{R_i\}},A_\Sigma) \times Z(M_3^{(2)};K_{\{R_j\}},A_\Sigma).$$

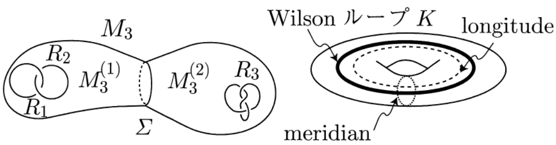


図 6 分配関数の位相的性質と中身の詰まったトーラス．

A_Σ は境界 Σ 上のゲージ場を表し，経路順序積によって**ホロノミー表現**を生成する．この位相的性質を利用して，$Z(\mathbf{S}^3; K_R) = \langle W_R(K)\rangle_{\mathbf{S}^3}$ の場合を考えてみよう．

Σ をトーラス $\mathbf{T}^2$ に選び，$M_3^{(2)}$ を中身の詰まったトーラス $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^1$ として，その芯に表現 R の Wilson ループが存在するように分割する．正準量子化により $Z(\mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^1; K_R)$ が群指標 χ_R で与えられることが示され[9]，さらに $G = SU(2)$ の場合には $R = [n]$ に対し，結び目を囲む meridian 方向のホロノミー表現 μ は，

$$\mu = \begin{pmatrix} m^{\frac{1}{2}} & * \\ 0 & m^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{k+2}n} & * \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{k+2}n} \end{pmatrix} \tag{5}$$

と制限されることも示される．この関係と群指標の正規直交性から，$Z(\mathbf{S}^3; K_R)$ は境界ホロノミー表現 μ が固定された，補空間上の分配関数 $Z(\mathbf{S}^3 \backslash K; \mu)$ と対応することが導かれる．以上の議論から Chern–Simons ゲージ理論を通じて，結び目不変量はその補空間の物理量として理解できるのである．

3.2 位相的重力理論と体積予想の物理的解釈

Chern–Simons ゲージ理論はさらに，位相的重力理論との等価性[10]という別の側面も Witten によって発見されている．3 次元 Euclid 的重力理論の Einstein–Hilbert 作用は

$$I_G = \frac{1}{16\pi G_N}\int_{M_3} d^3x\sqrt{g}(R - 2\Lambda)$$

であり，R は Ricci 曲率，Λ は宇宙定数を表している．特に $\Lambda = -1$ と選ぶと，この作用から得られる Einstein 方程式は双曲多様体の条件 (1) に他ならない．

ここでスピン接続 ω と triad 場 e 用いると，$\Lambda = -1$ の Einstein 方程式は，以下の作用の運動方程式としても得られる：

$$I_{\text{grav}} = \frac{i\sigma}{2\pi}\int_{M_3} \mathrm{Tr}\Big(\omega \wedge de + \omega \wedge \omega \wedge e - \frac{1}{3}e \wedge e \wedge e\Big).$$

さらに，この作用に M_3 の Chern–Simons 不変量に比例する位相項を加えても運動方程式は変わらない：

$$I_{\text{gCS}} = \frac{k}{4\pi}\int_{M_3} \mathrm{Tr}\Big(\omega \wedge d\omega - e \wedge de + \frac{2}{3}\omega \wedge \omega \wedge \omega - 2\omega \wedge e \wedge e\Big).$$

特に e と ω の線形結合 $A = \omega + ie$, $\bar{A} = \omega - ie$ を用いて，上の作用は次のように書き換えられる：

$$\begin{aligned} &I_{\text{grav}} + I_{\text{gCS}} \\ &= \frac{t}{8\pi}\int_M \mathrm{Tr}\left(A \wedge A + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right) \\ &\quad + \frac{\bar{t}}{8\pi}\int_M \mathrm{Tr}\left(\bar{A} \wedge \bar{A} + \frac{2}{3}\bar{A} \wedge \bar{A} \wedge \bar{A}\right). \end{aligned}$$

ただし，$t = k + \sigma$, $\bar{t} = k - \sigma$ と選んだ．この作用はゲージ群 $G = SL(2; \mathbf{C})$ の Chern–Simons ゲージ理論の作用に他ならない．つまり負の宇宙定数を持つ 3 次元位相的重力理論もまた，Chern–Simons ゲージ理論によって記述されるのである．

$G = SL(2; \mathbf{C})$ の Chern–Simons ゲージ理論の分配関数は A と $\bar{A}$ の独立な経路積分に分解され，

$$\begin{aligned} &Z_{SL(2;C)}(M_3; t; \bar{t}) \\ &= \sum_\alpha Z^{(\alpha)}_{SU(2)}(M_3, t; \mu^{(\alpha)})\bar{Z}^{(\alpha)}_{SU(2)}(M_3, \bar{t}; \mu^{(\alpha)}) \end{aligned} \tag{6}$$

と展開される．ここで，α は M_3 上の平坦接続 $F(A) = 0$ の解をラベルしている．特に M_3 を双曲多様体に選ぶと，その境界には parabolic な $PSL(2; \mathbf{C})$ ホロノミー表現 μ_c が現れる：

$$\mu_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

以下では，境界ホロノミー表現 (5) が μ_c と一致

する解を $\alpha = \mathrm{geom}$ と呼ぶことにする．

M_3 が結び目補空間の場合，結合定数を $k+2=n$ のように特殊化すると，$\mu=\mu_c$ が実現し，これはちょうど体積予想で考えた色付き Jones 多項式の特殊化に対応している．よって解 $\alpha=\mathrm{geom}$ での作用の古典値 $I^{(\mathrm{geom})}_{\mathrm{grav}} + I^{(\mathrm{geom})}_{\mathrm{gCS}}$ は，双曲多様体 M_3 の体積と Chern–Simons 不変量に一致するはずである．つまり (6) のカイラル部分 $Z^{(\mathrm{geom})}_{SU(2)}$ は，半古典重力理論として，以下のように展開される：

$$
\begin{aligned}
&Z^{(\mathrm{geom})}_{SU(2)}(M_3,t;\mu^{(\mathrm{geom})})\\
&=\exp\left[\frac{t}{4\pi}\Big(\mathrm{Vol}(\mathbf{S}^3\backslash K)\right.\\
&\qquad\left.+i\mathrm{CS}(\mathbf{S}^3\backslash K)+\mathcal{O}(t^{-1})\Big)\right].
\end{aligned}
$$

Chern–Simons ゲージ理論の位相的性質と重力的性質を併せると，結び目補空間の $Z^{(\mathrm{geom})}_{SU(2)}$ と色つき Jones 多項式は解析接続を通じて対応することも分かる．よって，Wilson loop 演算子の期待値の漸近展開が，結び目補空間の体積と Chern–Simons 不変量を与えることが物理的に帰結されるわけである．以上の考察を通じて，体積予想の主張が物理的に理解されることを概観した．

3.3 一般化された体積予想

こうした物理的解釈を基に，Gukov は体積予想の一般化[11]を提唱した．この一般化された体積予想では，$u+2\pi i = 2\pi i n/k$ を一定に保つ二重スケーリング極限に拡張し，以下の漸近的振舞いを予想した：

$$
\lim_{\substack{k,n\to\infty\\ u+2\pi i=2\pi i n/k}} \frac{J_n(K;e^{\frac{2\pi i n}{k}})}{k} = V(u). \qquad (8)
$$

右辺に現れる関数 $V(u)$ は **Neumann–Zagier 関数**[12]と呼ばれ，双曲的な体積と Chern–Simons 不変量との和の 1-パラメータ変形の u に関する正則部分を表している．特にこの関数の微分 $dV(u)/du$ は次の関係を満たす：

$$
dV(u)/du = -(\log l + \pi i). \qquad (9)
$$

ただし，l は境界トーラスの longitude 方向のホロノミー表現行列 ν の固有値である：

$$
\nu = \begin{pmatrix} l & * \\ 0 & l^{-1} \end{pmatrix}. \qquad (10)
$$

以下では Chern–Simons ゲージ理論の立場から Neumann–Zagier 関数のこの性質を見ることにする．

M_3 上の Chern–Simons 理論の古典的性質は運動方程式 $F(A)=0$ によって定められる．この平坦接続の解全体の集合 $\mathcal{M}_{M_3}$ は，ホロノミー表現の集合として，$\mathrm{Hom}(\pi_1(M_3), SL(2;\mathbf{C}))/$ (ゲージ同値) で与えられる．M_3 の境界 $\mathbf{T}^2$ 上の平坦接続だけに注目すれば，解空間 $\mathcal{M}_{\mathbf{T}^2}$ は 2 つの可換なホロノミー行列 μ,ν の固有値 $(l,m)\in\mathbf{C}^*\times\mathbf{C}^*$ によってパラメトライズされる．ところが $\mathbf{T}^2$ 上の平坦接続のうち，すべてが M_3 内部まで延長されるとは限らないので，一般に $\mathcal{M}_{M_3}\subset\mathcal{M}_{\mathbf{T}^2}$ という関係にある．実際，結び目補空間内の平坦接続は，結び目の基本群 $\pi_1(K)$ の表現を与えなければならないので，(l,m) は正則な方程式によって制限される：

$$
\mathcal{M}_{\mathbf{S}^3\backslash K} = \left\{(m,l)\in\mathbf{C}^*\times\mathbf{C}^*\,\middle|\,A_K(l,m)=0\right\}.
$$

このように，結び目補空間上の平坦接続のモジュライ空間は Riemann 面となり，結び目の**特性多様体**と呼ばれる．特に，この定義方程式は **A 多項式**と名づけられている[13]．

具体例として，8 の字結び目の基本群は

$$
\begin{aligned}
&\pi_1(\mathbf{4_1}) = \langle x,y | \omega x = y\omega,\quad \omega = xy^{-1}x^{-1}y\rangle,\\
&\mu = x,\quad \nu = xy^{-1}xyx^{-2}yxy^{-1}x^{-1} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

となり，これに (5) と (10) の表現を代入すると，$\pi_1(\mathbf{4_1})$ の関係式が満たされるには，A 多項式

$$
\begin{aligned}
&A_{\mathbf{4_1}}(l,m)\\
&= l + (m^2 - m - 2 - m^{-1} + m^{-2}) + l^{-1} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

が零になることを要請しなければならない．

このモジュライ空間 $\mathcal{M}_{M_3}$ を用いて，結び目補空間上の Chern–Simons ゲージ理論に対し，半古典的解析をしてみよう．$\Sigma\times\mathbf{R}$ 上で $A_3=0$ ゲージを選ぶと，ゲージ場 A_i^a $(i=1,2,\ a=1,2,3)$

の Poisson 交換関係は，

$$\{A_i^a(x), A_j^b(y)\} = \frac{4\pi}{t}\delta^{ab}\epsilon_{ij}\delta^2(x-y).$$

この関係を用いると，$\Sigma = \mathbf{T}^2$ の場合，ホロノミー表現行列の固有値 $u = \log m$, $v = \log l$ は Poisson 交換関係：

$$\{\hat{u}, \hat{v}\} = \frac{4\pi}{t} \tag{13}$$

に従い，プランク定数 $\hbar = \frac{4\pi i}{t}$ の量子力学のように振る舞うことが分かる．

$\mathcal{M}_{M_3}$ は位相空間 (u, v) の A 多項式による制限として得られることを思い出すと，M_3 上の分配関数は，ハミルトニアン A_K によって拘束される波動関数として解釈できる．そこで，WKB 量子化の手法を用いて，波動関数の位相 S を調べると，半古典的に以下の関係に従うことが分かる：

$$dS = \theta|_{\mathcal{M}_{M_3}}. \tag{14}$$

ここで θ は位相空間上の 1 形式であり，局所的にシンプレクティック形式 ω と $\omega = d\theta$ という関係にある．交換関係 (13) より定まる $\omega = du \wedge dv$ から θ を求め，A 多項式で制限すれば，双曲構造が入る点の近傍で $\theta = -(v + i\pi)du$ と展開される．波動関数と色つき Jones 多項式を同定すると，位相 S と Neumann–Zagier 関数 $V(u)$ が一致すると期待される．実際，上記の半古典的解析から，Neumann–Zagier 関数の性質 (9) が (14) から得られるので，色つき Jones 多項式の漸近的振舞いが (8) によって与えられることが予想される．こうして，Chern–Simons ゲージ理論の半古典的解析から，一般化された体積予想の主張 (8) が物理的に導かれたのである．

4. さいごに

本稿では体積予想と AJ 予想が，量子化という観点から統一的に意味づけられ，場の理論の解析が 3 次元多様体の位相不変量に関する興味深い性質を明らかにしていることを概観した．この中で，Chern–Simons ゲージ理論を通じて，リーマン面の量子化が本質的役割を果たしたが，量子リーマン面構造は位相的開弦理論にも現れることが知られている．そこで少し見方を変えると，結び目の特性多様体を標的空間とする位相的開弦理論が，Chern–Simons ゲージ理論の有効的記述を与えることも期待される[2)]．

体積予想は元来物理的観点に基づいて提唱された理論であるにも関わらず，15 年ほど物理側からはさほどフィードバックはなかった．これが近年脚光を浴びつつあるのは，弦理論の研究が進展し機が熟したためであろう．ようやく互いの関係を発見しつつあるこの分野の研究で，今後もさらに驚くような結果がもたらされることを期待したい．

最後に，本稿に関し有益なコメントを下さった，加藤晃史氏と菅野浩明氏に御礼申し上げる．

参考文献

1) R. Kashaev, *Lett. Math. Phys.* **39** (3) (1997) 269; H. Murakami and J. Murkami, *Acta Mathematica* **186** (1) (2000) 85.
2) R. Dijkgraaf and H. Fuji, *Fortsch. Phys.* **57** (2009) 825; R. Dijkgraaf, H. Fuji, and M. Manabe, *Nucl. Phys.* **B849** (2011) 166; S. Gukov and P. Sulkowski, arXiv:1108.0002[hep-th].
3) Y. Terashima and M. Yamazaki, arXiv:1103.5748 [hep-th]; 1106.3066[hep-th]; T. Dimofte and S. Gukov, arXiv:1106.4550[hep-th]; T. Dimofte, D. Gaiotto, and S. Gukov, arXiv:1108.4389[hep-th].
4) 体積予想の数学的側面の優れた Review としては：H. Murakami, arXiv:0802.0039[math.GT];1002.0126 [math.GT].
5) W. Thurston, "The Geometry and Topology of Three-Manifolds", `http://library.msri.org/books/gt3m/`.
6) G.K. フランシス（著），宮崎興二（翻訳）『トポロジーの絵本』シュプリンガー・ジャパン．
7) K. Habiro, 数理解析研究所講究録 **1172** (2000) 34.
8) E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **121** (1989) 351.
9) S. Elitzur, G.W. Moore, A. Schwimmer, and N. Seiberg, *Nucl. Phys. B***326** (1989) 108.
10) E. Witten, *Nucl. Phys. B***311** (1988) 46.
11) S. Gukov, *Commun. Math. Phys.* **255** (2005) 577.
12) W.Z. Neumann and D. Zagier, *Topology* **24** (1985) 307.
13) D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D.D. Long, and P.B. Shalen, *Invent. Math.* **118** (1994) 47.

（ふじ・ひろゆき，名古屋大学大学院理学研究科）

超離散ソリトン系と組み合わせ的表現論



坂本　玲峰

1. はじめに

本稿では超離散ソリトン系と組み合わせ的表現論に関わる最近の話題から初等的に解説可能な部分を選んで説明をしたいと思う．物理学上の研究から数学の理論が生まれ，また数学における進展から新しい物理が見出されるという数理物理学の典型的な例である．もとより深い代数学の素養が必要となる話題も多く，ここで取り上げられる内容はまさに氷山の一角にすぎないのであるが，本稿によって読者の方々の好奇心を刺激できれば幸いである．

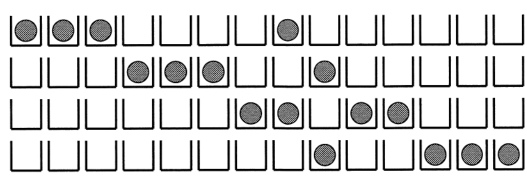
2. 箱玉系

まず超離散ソリトン系の代表例である**箱玉系**[1,2]を定義する．超離散ソリトン系という単語は通常のソリトン系から**超離散化**と呼ばれる極限を取って得られる系を指すが，本稿で興味の対象とするのは以下で述べるような組み合わせ論的な解釈を許す物のみである．

箱玉系の作り方は，まず同じ形をした箱をたくさん準備して直線状に並べ，それぞれの箱の中に玉を入れていく．しばらくは玉の種類も１種類だけであるとし，一つの箱には多くても一つの玉しか入らない（これを箱の容量が１であると言う）としよう．これらの箱の中に好きな配置で有限個の玉を入れ，以下の手順で玉を右側に動かしていくことにより箱玉系の**時間発展**を定義する．ただし玉が右側からこぼれてしまわないように必要なら右側に空の箱をたくさん追加しておこう．

時間発展の手順：玉を左側から順に見ていって，それぞれの玉より右側にある空箱のうち最も左側のものに順に移していく．ただし既に動かした玉にはそれ以上触れない．

この時間発展の規則を一行目の状態から始めて順に繰り返していった例をあげる：



箱玉系では連続した玉の並びをソリトンとみなす．例えば上の例の一行目には長さ３と１の２つのソリトンが含まれている．この例を観察して分かることは，ソリトンどうしの相互作用がない場合は各ソリトンは長さと等しい速度で移動し，途中（三行目）で非自明な相互作用があっても最終的（四行目）にはまた長さ１と３のソリトンが現れることである．ここで**ソリトン**になじみのない方は「ソリトン工房」内の解説[3]，特に大波が小波を追い越す動画を鑑賞されることをお薦めする．すると箱玉系におけるソリトンの振舞いは通常のソリトン系におけるものと類似のものであることが納得されよう．

3. アフィン量子群の結晶基底による定式化

箱玉系の可積分性については通常のソリトン系から直接極限操作を行うことにより議論されてきたが[4]，ここではアフィン量子群の**結晶基底**[5]の理論を用いたより代数的な取扱い[6,7]を紹介したい．本来はより広い枠組みであるが，現在の場合（$A_1^{(1)}$ 型代数のベクトル表現の場合）に絞って紹介する．

箱の容量が一般の場合が必要となるので新しく記号を導入しよう．記号 (a,b) とは容量 $a+b$ の箱に b 個の**玉**が入っていて a 個分の**空きスペース**がある状態とする．箱玉系の状態とは玉が入った状態 $(0,1)$ と空箱の状態 $(1,0)$ の並びであるが，これをテンソル積を使って $(1,0)\otimes(0,1)\otimes\cdots$ 等のように表す．テンソル積は表現のテンソル積なのであるが，慣れない方はただの記号法だと思って頂きたい．

本節の議論の核心部は**組み合わせ R 行列**

$$R:(a,b)\otimes(c,d)\longmapsto(c',d')\otimes(a',b')$$

と呼ばれる次の写像である：

$$\begin{aligned}
a'&=a+\min(b,c)-\min(a,d),\\
b'&=b-\min(b,c)+\min(a,d),\\
c'&=c-\min(b,c)+\min(a,d),\\
d'&=d+\min(b,c)-\min(a,d).
\end{aligned}$$

式の具体形はともかく，写像 R は表現のテンソル積の左右を入れ替える同型写像として現れる物であり，非常に由緒正しい写像である．

写像 R を再帰的に施すことにより新しい写像 T_l $(l\in\mathbb{Z}_{\geq1})$ を定義する．考えたい箱玉系の状態を $b=b_1\otimes b_2\otimes\cdots$ とし，$u_l:=(l,0)$ と定義する．前節と同様 b の右側には充分たくさんの空箱 $(1,0)$ をつけておく．ここで $R:u_l\otimes b_1\mapsto b'_1\otimes u_l^1$ を計算する．このとき得られた u_l^1 を用いて今度は $R:u_l^1\otimes b_2\mapsto b'_2\otimes u_l^2$ を計算する．以下再帰的に $R:u_l^{i-1}\otimes b_i\mapsto b'_i\otimes u_l^i$ と計算していく．得られた b'_i を用いて $b':=b'_1\otimes b'_2\otimes\cdots$ と置く．このとき写像 T_l は $T_l(b):=b'$ と定義される．すると実は第 2 節で与えた箱玉系の時間発展は T_∞ と同値であることが分かる．このような定式化をすると，御利益として，写像 R が Yang–Baxter 方程式を満たすことから任意の T_l,T_k が可換であること（**量子可積分性**）および箱玉系の保存量の代数的定式化が得られる[7]．

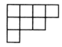
4. 艤装配位

次節で箱玉系の逆散乱形式を与える際に登場する**艤装配位**と呼ばれる理論について必要となる範囲で紹介する．艤装配位（rigged configurations）とは量子可積分系の Bethe 仮設方程式の研究から抽象化されてできた概念である[8]．当初はある組み合わせ論的恒等式の証明に応用されたが，次節で述べる箱玉系との関連が発見されたことで物理的意味づけがよりはっきりしたともいえる．結晶基底や艤装配位は**組み合わせ的表現論**の例であり，数学の理論としても現在発展中である．数理物理学から数学への貢献といった場合，物理的モデルそのものがそのまま応用される場合だけではなく，艤装配位のような上手な抽象化を与えることによって数学上の良い応用が見つかるという例になっている．

艤装配位は現在の状況ではヤング図の各行に整数を付け加えたものであり，以下のようにして箱玉系の状態から構成できる．記号を準備しよう．艤装配位のヤング図（configuration と呼ぶ；全部で g 行とする）の各行の長さを ν_i，その行に付け加えた整数（rigging と呼ぶ）を J_i 等と書き，それらの対の集合として艤装配位を $(\nu,J)=\{(\nu_i,J_i)\}_{i=1}^g$ のように表示する．箱玉系の長さ L の状態 $b=b_1\otimes b_2\otimes\cdots\otimes b_L$ を考え，そのうち玉が存在するような場所 b_k の添え字が左から順に $k_1,k_2,\ldots$ であるとする．箱玉系の状態から艤装配位を作る写像（実は全単射）を $\Phi:b\mapsto(\nu,J)$ と書く．

以下写像 Φ の記述をする．そのために必要となる概念を定義しよう．μ を任意のヤング図，$Q_\ell(\mu)$ を μ の左から ℓ 列分に含まれるます目の総数とし，**vacancy number** $p_\ell(k,\mu)$ を

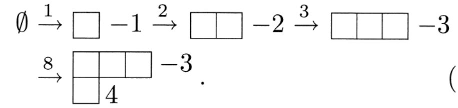
$$p_\ell(k,\mu):=k-2Q_\ell(\mu)\qquad(1)$$

と定義する．例えば $p_2(16,$  $)=16-2\cdot 5=6$．今考えている長さ L の状態 b および対応する艤装配位 (ν, J) に関し，ν のある行 ν_i に付けられた rigging J_i がその行の長さに関する vacancy number と等しいとき，すなわち $p_{\nu_i}(L,\nu)=J_i$ となるとき，行 ν_i は**特異な行**であると言う．

以上の記号，概念を用いると写像 Φ は次のようなアルゴリズムで与えられる．出発点となる艤装配位は空集合であるとし，玉の位置 $k_1, k_2, \ldots$ の順に以下の手続きを繰り返して再帰的に艤装配位を成長させていく．

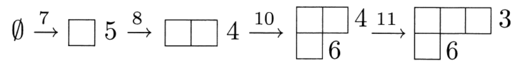
1. 位置 k_{j-1} まで行った結果，途中段階の艤装配位 (μ, I) が得られたとする．
2. 次の位置 k_j に対して以下の操作を行う．まず (μ, I) を長さ k_j-1 の状態に対する艤装配位と考え，vacancy number $p_{\mu_i}(k_j-1,\mu)$ をすべての行に対し計算し，μ の特異な行をすべて特定する．
3. 特異な行が存在しない場合はヤング図 μ の一番下に長さ 1 の行を付け加える．逆に特異な行が存在する場合，最も長い特異な行から任意に*1)一つ選び，その行の長さを 1 増やす．こうして得られた新しいヤング図を μ' を書く．
4. 新しい rigging I' を以下のように定める．$\mu\to\mu'$ において変化しなかった行に対応する成分は変化させない．一方 $\mu\to\mu'$ において変化した行を μ'_i とするとき，対応する rigging I'_i は行 μ'_i が特異な行となるように $I'_i=p_{\mu'_i}(k_j,\mu')$ と定める．
5. 以上の手続きをすべての k_j について行い最終的に得られる結果を (ν, J) とするとき $\Phi(b)=(\nu, J)$ と定める．

以上の手続きの Mathematica によるプログラム例がウェブサイト[9] にて入手可能である．例題として第 2 節に与えた箱玉系の時間発展の例を考える．計算を図示するにあたって，ヤング図の各行の右側に対応する rigging を付し，また矢印の上に対応する k_j の値を書き込むこととする．まず今考えている例の第一行目では玉の位置 k_j は $1,2,3,8$ であり，計算は以下のようになる．



(2)

また同じ例の第三行目に関しては以下の通り．



(3)

5. 箱玉系の逆散乱形式と艤装配位

箱玉系は非線形な系であるが，前節の写像 Φ を用いると系の保存量および線形化パラメータの完全系を与える**逆散乱形式**を構成できること[10]を紹介する．この理論はより一般の箱玉系を解析する際に現れる困難を克服するために導入された手法であり，現在のような簡単な場合に用いるのは少々牛刀をもって鶏を割く嫌いがあるが，理論の雰囲気をお伝えできればと思う．

まず前節で与えた 2 つの計算例 (2) と (3) を比べてみよう．するとヤング図の形は同じであり，rigging の値が対応する行の長さの 2 倍だけ変化していることが分かる．rigging の変化に現れる係数 2 は時間発展 T_∞ を 2 回繰り返したことに由来する．以上の性質は[6,7]による一般の箱玉系に対しても成り立ち，現在の状況に制限して述べると以下のようになる．与えられた箱玉系の状態 b が艤装配位 $\{(\nu_i, J_i)\}_{i=1}^{g}$ と対応しているとする．そのとき

$$\Phi(T_l(b))=\{(\nu_i, J_i+\min(l,\nu_i))\}_{i=1}^{g}. \quad (4)$$

写像 Φ は全単射であるので，結局ヤング図 ν が箱玉系の保存量（作用変数）の全体を与え，rigging が運動の線形化パラメータ（角変数）の全体を与えることが分かる．すなわち写像 Φ は箱玉系の逆散乱形式を与える．このことは例 (2) と (3) を比較するだけでも非自明な結果であることが納得されよう．実際証明の要点は文献 11) による深遠な定理に依存する．なお第 3 節末尾で触れた代数的

*1) 艤装配位では本来 ν の行の並び方は本質的ではないのだが，創始者の一人 Kirillov 氏はこだわりをお持ちのようである．

に定まる保存量[7]は艤装配位と一致することが確かめられている[12]．

一旦箱玉系の本質が艤装配位の理論にあると分かるとそれまで懸案だった基本的な未解決問題が次々に解決されてしまった．まず文献13)において文献6, 7)による一般化された箱玉系が実際にソリトン系であることの証明が完結された．さらに箱玉系の初期値問題を解くためには，既に箱玉系の運動が艤装配位上で線形化されることが分かっているので，与えられた艤装配位から箱玉系の状態を回復するような解析的表示式を与えればよいことになる．こちらも一般の箱玉系も含む形で文献14)によって初めて解決されたが，現在の状況に制限して紹介しよう．箱玉系の状態 b の k 番目の要素を $b_k = (1 - x(k), x(k))$ と表す．すなわち $x(k)$ は k 番目の箱に含まれる玉の個数である．そのとき

$$x(k) = \tau_0(k) - \tau_0(k-1) - \tau_1(k) + \tau_1(k-1),$$

$$\tau_r(k) := - \min_{n \in \{0,1\}^g} \left\{ \sum_{i=1}^{g} (J_i + r\nu_i - k) n_i + \sum_{i,j=1}^{g} \min(\nu_i, \nu_j) n_i n_j \right\} \quad (r = 0, 1)$$

という式が成り立つ．ここで $n = (n_1, \ldots, n_g)$ とした．証明に当たってタウ関数 τ が広田双線形形式の解となっていること自体は数ページの（非自明な）計算で証明できるが，技術的な難しさは艤装配位の定義が解析的な表示とはかけ離れたものであり，両者の比較が極めて困難な点である．この点に関しては写像 Φ の表現論的記述[13]を用いて克服することができる[*2]．全体として証明の要所では無限次元の対称性を駆使した議論が用いられ，表現論の一つの応用例となっている点が興味深い．

*2) そもそも文献13)における骨の折れる証明を完成させる原動力となったのは，得られる結果を用いれば箱玉系の初期値問題の解決が可能であることに筆者が気付いたことである．実際文献14)における技術的な側面は文献11)および13)の結果に大きく依存している．艤装配位に関する命題の証明は大抵難しく，今に至るまで苦闘の連続である．

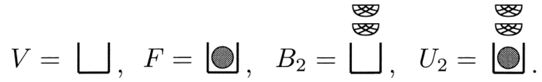
6. ボックス–バスケット–ボール系

通常の箱玉系（box–ball system）の拡張として最近得られた**ボックス–バスケット–ボール系**（box–basket–ball system, 以下略してBBB系）[15]について紹介しよう．箱玉系の拡張で結晶基底と直接対応がつかないおそらく最初の例と思われる．元々は米国の組み合わせ論研究者たちによってある多項式に関する研究の副産物として得られたwhurl関係式[16]と呼ばれる写像の最も簡単な場合が出発点である[*3]．その意味で以下に述べる結果は数学における進展によって引き起こされた物理的問題の例と言える．

箱玉系のときと同様にまずは組み合わせ論的な定義を与えよう．以下第3節における取扱いと同様にして最初からBBB系の状態を $b = b_1 \otimes b_2 \otimes \cdots$ と表示する．ただし今回は各 b_i のパラメータ付けは三成分となり，(a, b, c) のように表示する．各成分に対して次のような解釈を与える；b は**バスケット**の数，c は**ボール**の数そして a は**空きスペース**の数とする．このような解釈は後で述べる組み合わせ論的な時間発展の定義を見て頂ければ納得して頂けると思う．

以下第2節と同様にして容量1の箱が直線状に並んでいるとしよう．今回も右側には充分多くの空箱を並べておく．我々の解釈ではボールは箱およびバスケットの中に最大一つ入ることが可能で，一方バスケットは箱の上にいくらでも重ねられるとする．すなわちボールはフェルミ的粒子，バスケットはボース的粒子で，両者の間にはボールがバスケットに入るという形で相互作用が存在する系である．可能であればボールは（バスケットに入れる前に）箱のほうに入るようにしよう．ここで次節で使用する記号を準備しておく．$V = (1, 0, 0)$, $F = (0, 0, 1)$, $B_i = (i+1, i, 0)$ および $U_i = (i, i, 1)$ と書く．ただし $i \geq 1$ とする．例をいくつか図示する．

*3) 彼らの研究については解説論文[17]を参照されたい．彼らの結果と山田泰彦氏らの既存の結果との関係も述べられている．

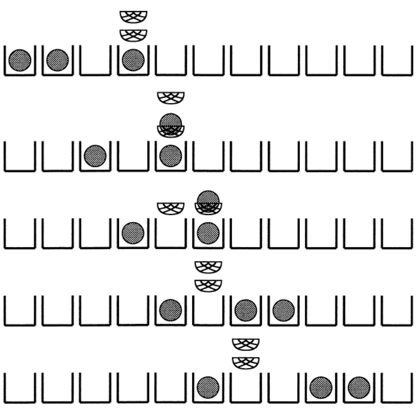


ここで挙げた例を観察して頂ければ記号 (a,b,c) の意味が分かりやすくなると思う．

以上の準備の下で BBB 系の時間発展の手順を以下のようにして定義する．

時間発展の手順：バスケットのうち空のものをすべて一つ右の箱の上に移し，それ以外のものはそのままにしておく．次に玉を左側から順に見ていって，それぞれの玉より右側にある空箱または空きバスケットのうち最も左側のものに順に移していく．ただし既に動かした玉にはそれ以上触れない．

この手順はバスケットが一つもない場合は箱玉系の時間発展と一致することを注意しておく．簡単な例を挙げておこう．



7. ソリトン系としての BBB 系

前節で述べたように BBB 系は **whurl 関係式**

$$R:(a,b,c)\otimes(d,e,f)\mapsto(d',e',f')\otimes(a',b',c')$$

から構成される*4)．この写像 R と $u_l:=(l,0,0)$ から第 3 節と同様にして時間発展 T_l を構成すると，前節で紹介した BBB 系時間発展の定義は T_∞ と一致することが証明できる．さらに whurl 関係式が Yang–Baxter 方程式を満たすことから任意の T_l, T_k が可換であること，すなわち BBB 系は**量子可積分系**であることが示される．ただし BBB 系に関しては対応する無限次元対称性が知られていないので箱玉系のように保存量を代数的に構成することはまだできていない．

さて BBB 系が量子可積分系であることが分かったとしても，BBB 系がソリトン系であるかどうかは自明ではない問題である．そのためにまず T_∞ 時間発展に対して形を変えずに伝播するような孤立波を分類すると，結論として 2 種類の孤立波が見つかる．一つ目は箱玉系におけるソリトンで，今の記号では F が k 個連続した状態（これを F_k と書く）であり速度 k で伝播する．二つ目は F, B, U の任意の並びのうち部分列 FF および FU を含まないもの全体である．後者は速度 1 で伝播するので**遅いソリトン**と呼ぼう．

では遅いソリトンの正体とは何であろうか．答えは散乱に対する**位相差**にある．ここで位相差とは，2 つのソリトンが衝突後に元の孤立波の形状を回復したとき，最初の状態の孤立波が衝突なしで自由伝播したと考えた場合に到達するべき位置からのずれであり（右向きを正とする），非線形系に特有な量である．そのとき速度 1 で伝播する 2 つのソリトン F_1 と B_i は，F_k との散乱の位相差がそれぞれ $-2, -1$ と異なっていることが分かる．そのため F_1 と B_i が重なり合った状態が存在することとなり，これが遅いソリトンとなる．遅いソリトンにさらに多くの F_k をぶつけると位相差の違いから構成要素の F_1 と B_i に分解できる．前節で与えた時間発展の例は遅いソリトン U_2 が F_1 と B_2 へ分解する例である．そこで BBB 系の状態を構成する基本的なソリトンを多数の F_k をぶつけて得られる F_i, B_j 全体として定義すると，BBB 系は正しくソリトン系となっていることが証明できる．

---

*4) 読者の便宜のため具体形を与えておこう．

$$a'=a-\min(a+b,a+c,b+f)+\min(e+c,d+c,d+b),$$
$$b'=b-\min(a+b,a+c,b+f)+\min(a+e,d+f,e+f),$$
$$c'=c-\min(e+c,d+c,d+b)+\min(a+e,d+f,e+f),$$
$$d'=d+\min(a+b,a+c,b+f)-\min(e+c,d+c,d+b),$$
$$e'=e+\min(a+b,a+c,b+f)-\min(a+e,d+f,e+f),$$
$$f'=f+\min(e+c,d+c,d+b)-\min(a+e,d+f,e+f).$$

8. おわりに

本文中にも述べたが艤装配位の理論は元々物理における量子可積分系の研究から抽象化されて導入されたものである．元来の応用対象であった組み合わせ論的な恒等式の理論のみならず箱玉系の理論も含むことが分かってきたが，さらに世界が広がりつつあるように感じられる．最近の進展として，非例外型アフィン量子群の最高ウェイトベクトルと A 型の最高ウェイトベクトルおよび Littlewood–Richardson 盤の積集合との全単射が艤装配位を用いて構成された[18]．このような全単射の構成は艤装配位を使用しないと難問であることが知られており[19]，改めて艤装配位の強力さを認識させられることとなった．今後もアフィン量子群の結晶基底（こちらも物理からの影響が多い理論である）の理論の発展と相まって進展が続くものと期待され，数理物理学の典型的な例としてその展開に注目している．

ここで読者の方々にとって参考となると思われる文献についてコメントする．箱玉系についてさらに詳細な情報を得るには論文[14]を参照して頂くのが今でも最良の方法ではないかと思う．実際執筆中は後々まで参考文献としてご使用いただけるようにとの期待から必要となる背景の解説まで含めかなり詳細に記述した．BBB 系については今のところ文献 15) が唯一の文献である．両論文とも証明の細部までチェックしようとするよりは，掲げられた例などを参考に論理の流れや意味を追って頂ければと思う．

最後にこれから研究を始めようとされる読者の方々へのコメントも書いておこう．箱玉系は確かに取りつきやすい見かけではあるが，逆に極度に単純化されているがためにそれだけを研究していると数学（または物理学）の中で自分の研究がどこにあるのか方向性を見失ってしまう可能性もあると思う．そういったことのないようにまずは文献 20～23) 等の基礎的な教科書を精読する等して広い視点からの研究をされることをお薦めする．

参考文献

1) D. Takahashi and J. Satsuma: *J. Phys. Soc. Japan* **59** (1990), 3514–3519.
2) D. Takahashi: *Proceedings of the International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA '93)*, (1993) 555–558.
3) http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~takasaki/soliton-lab/gallery/solitons/
4) T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma: *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 3247–3250.
5) M. Kashiwara: *Duke Math. J.* **63** (1991), 465–516.
6) G. Hatayama, K. Hikami, R. Inoue, A. Kuniba, T. Takagi and T. Tokihiro: *J. Math. Phys.* **42** (2001), 274–308.
7) K. Fukuda, M. Okado and Y. Yamada: *Internat. J. Modern Phys.* **A15** (2000), 1379–1392.
8) S.V. Kerov, A.N. Kirillov and N.Yu. Reshetikhin: *Zap. Nauchn. Sem. (LOMI)* **155** (1986) 50–64.
9) http://demonstrations.wolfram.com/PeriodicBoxBallSystem/
10) A. Kuniba, M. Okado, R. Sakamoto, T. Takagi and Y. Yamada: *Nuclear Phys. B***740** (2006), 299–327.
11) A.N. Kirillov, A. Schilling and M. Shimozono: *Selecta Math. (N.S.)* **8** (2002) 67–135.
12) R. Sakamoto: *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2009) 579–614.
13) R. Sakamoto: *J. Algebraic Combin.* **27** (2008) 55–98.
14) A. Kuniba, R. Sakamoto and Y. Yamada: *Nuclear Phys. B***786** (2007) 207–266.
15) T. Lam, P. Pylyavskyy and R. Sakamoto: preprint, arXiv:1011.5930.
16) T. Lam and P. Pylyavskyy: preprint, arXiv:1008.1949.
17) T. Lam: preprint, arXiv:1012.1262.
18) M. Okado and R. Sakamoto: *Adv. Math.* **228** (2011) 1262–1293.
19) M. Shimozono: preprint, arXiv:math/0501353.
20) V.G. Kac and A.K. Raina: *Bombay Lectures on Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras*, World Scientific Inc. (1987), 158 pages.
21) 神保道夫：『量子群とヤン・バクスター方程式』，シュプリンガー・ジャパン (1990), 134 pages.
22) R. Carter: *Lie Algebras of Finite and Affine Type*, Cambridge University Press (2005), 650 pages.
23) 小林俊行，大島利雄：『リー群と表現論』，岩波書店 (2005), 610 pages.

（さかもと・れいほう，東京理科大学理学部）

物理とモノドロミー保存変形

山田　泰彦

■　1. はじめに　■

理学や工学において様々な特殊関数が活躍する．それらは微分方程式の解として現れることが多く，そのほとんどが線形である．

非線形微分方程式の定める良い特殊関数を見つけようという努力から，**パンルヴェ方程式**，および，より一般の**モノドロミー保存変形理論**が誕生したのは，約百年前のことである．

これらの理論は，現代数学の抽象化指向の中でしばらく忘れられてしまうのであるが，1970 年代になって，イジング模型におけるパンルヴェ方程式の出現という T.T.Wu たちによる驚くべき発見により復活を遂げ，壮麗な**ホロノミック量子場理論**へと繋がる．その影響は，ソリトン理論，可解格子模型はもとより，可積分系理論全体の根底をなす潮流として現在に続いている．

以上のようなモノドロミー保存変形の正史として，第一人者による優れた解説[1,2)]があるので，是非ご一読（一度ではもったいない）をお勧めしたい．本稿が，特に若い読者の方々にとって，こうした本格的な文献に挑戦するきっかけにでもなれば幸いである．

■　2. モノドロミーとは　■

簡単な例から始めよう．微分方程式

$$\frac{d}{dz}y(z)=\frac{a}{z}y(z)$$

は，変換 $z \to ze^{2\pi i}$（原点の周りを一回転して戻って来るという意味）に対して不変であるが，解 $y=z^a$ は，同じ変換の下で不変ではなく，

$$y(z)\to y(z)C,\quad C=e^{2\pi ia}$$

と変化する．係数 C を**モノドロミー**という．

少し一般化して，線形微分方程式

$$\frac{d}{dz}Y(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{z-t_i}Y(z) \qquad (1)$$

を考える．$Y(z)$ は N 成分の未知関数からなる縦ベクトル，$A_1,\cdots,A_n$ は $N\times N$ の定数行列で留数行列という．

微分方程式 (1) は，$z=t_1,\cdots,t_n,\infty$ に特異点をもつ．解 $Y(z)$ の変数 z が，これら特異点の周りをある経路 γ に沿って巡り元に戻ってきたときの解（$Y(z)$ の γ に沿った解析接続）を $Y^{\gamma}(z)$ とする．$Y^{\gamma}(z)$ は元の $Y(z)$ と一致するとは限らないが，同じ微分方程式の解ではある．そこで，解空間（N 次元）の基底を $Y_1(z),\cdots,Y_N(z)$ とすれば，$Y_i(z)$ の解析接続 $Y_i^{\gamma}(z)$ は $\{Y_j(z)\}$ の定数係数の一次結合で表される．解の基底を横に並べた基本解行列を $\boldsymbol{Y}(z)=[Y_1(z),\cdots,Y_N(z)]$ と書けば，

$$\boldsymbol{Y}(z)\to\boldsymbol{Y}^{\gamma}(z)=\boldsymbol{Y}(z)C_{\gamma}$$

となる．定数行列 C_{γ} を経路 γ に対する**モノドロ**

ミー行列という．

現象を局所的に追跡する微分方程式に対して，大局的に記述するのがモノドロミー行列であり，量子論的には，シュレーディンガー方程式と散乱行列の関係とも言える．どっちが大事ということではなく，局所的記述と大局的記述を行ったり来たりできることが重要である．

3. シュレージンガー*1) 方程式

線形微分方程式を与えれば，具体的な決定は一般に大変困難であるにせよ，少なくとも原理的にはモノドロミーが定まる．逆に，「与えられたモノドロミーに対してそれを再現する微分方程式はあるか？」というのが**リーマンの問題**である．関連して，「モノドロミーを変えないような微分方程式の変形を調べよ」という**モノドロミー保存変形の問題**も重要で，これもリーマンに遡るという．

シュレージンガーは，微分方程式 (1) の場合に，特異点の位置 $t = \{t_i\}$ を動かしたとき，留数行列たち $\{A_i\}$ の t 依存性を上手く与えて，モノドロミーが t によらないようにできるか？ という問題を考えた．その答として得たのが，次の**シュレージンガー方程式**（1912）である．

$$\frac{\partial A_i}{\partial t_j} = \frac{[A_i, A_j]}{t_i - t_j} \quad (i \neq j),$$
$$\frac{\partial A_i}{\partial t_i} = -\sum_{j(\neq i)=1}^{n} \frac{[A_i, A_j]}{t_i - t_j}. \tag{2}$$

ここで $[A, B] = AB - BA$ と書いた．

式 (2) は，行列の未知関数 A_i に対する非線形連立偏微分方程式系であり，線形微分方程式 (1) と，それを変形する方程式

$$\frac{\partial}{\partial t_i} Y(z) = B_i Y(z), \tag{3}$$

$$B_i = -\frac{A_i}{z - t_i} \tag{4}$$

との両立条件として導かれる．実際，z の有理関数を成分とする行列 B_i により (3) が成り立つことと，t_i による変形でモノドロミーが不変であることは同値であり，今の場合は，両立性のため B_i は (4) でなければならない．このように，シュレージンガー方程式は，線形方程式の両立条件としての記述（つまり**ラックス形式**）を最初から伴っており，同様のことは，他のモノドロミー保存変形についても言える．

4. 共形場理論との関係

シュレージンガー方程式 (2) は，次のようなハミルトン系としても書ける．

$$\frac{\partial}{\partial t_i} A_j = \{H_i, A_j\}. \tag{5}$$

ここでハミルトニアンは

$$H_i = \sum_{j(\neq i)=1}^{n} \frac{\mathrm{tr}(A_i A_j)}{t_i - t_j}$$

であり，ポアソン括弧 $\{\cdot, \cdot\}$ は，行列の力学変数 $A_i = \{(A_i)_{ab}\}_{a,b=1}^{N}$ に対して

$$\{(A_i)_{ab}, (A_j)_{cd}\} = \delta_{ij}\big((A_i)_{ad}\delta_{cb} - (A_i)_{cb}\delta_{ad}\big)$$

で与える．このポアソン括弧の量子化

$$[(E_i)_{ab}, (E_j)_{cd}] = \delta_{ij}\big((E_i)_{ad}\delta_{cb} - (E_i)_{cb}\delta_{ad}\big)$$

は，n 個の N 次元空間の各々に作用する行列単位 $(E_i)_{ab}$ の交換関係に他ならず，それから得られるカシミール作用素を $\Omega_{ij} = \sum_{a,b=1}^{N} (E_i)_{ab}(E_j)_{ba}$ と書けば，(5) の量子化として次の方程式を得る．

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \Psi(t) = \sum_{j(\neq i)=1}^{n} \frac{\Omega_{ij}}{t_i - t_j} \Psi(t).$$

これは，アフィン・リー代数の対称性をもつ共形場理論に現れる**KZ 方程式**に他ならない．シュレージンガー方程式に限らず，他のモノドロミー保存変形にも同様の対応を見ることができ，この意味

*1) 紛らわしいが，シュレーディンガー（E. Schrödinger）とシュレージンガー（L. Schlesinger）は別人である．シュレーディンガーの「固有値問題としての量子化」第 1 部（1926）には，水素原子に対する彼の方程式の扱いに関する数学的事項について，シュレージンガーの Differentialgleichungen (1900) を見よ，とある．

で，共形場理論はモノドロミー保存変形理論の量子化であると言われる[*2)]．

■ 5. ソリトン理論と相似簡約 ■

シュレージンガー方程式では，線形微分方程式の特異点は一位の極（確定特異点）のみであったが，高位の極（不確定特異点）を含む拡張が三輪・神保・上野によりなされており[3)]，そこには**ソリトン方程式**も包括されている．実際，各 $i=1,\ldots,n$ に対する変形 (3) に対して，両立条件

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_i}-B_i,\frac{\partial}{\partial t_j}-B_j\right]=0$$

が従うが，これは，ソリトン方程式のラックス表示に他ならない．特に，特異点を $z=\infty$ のみとして，そこで任意位数の不確定特異点を許容した場合，N 次行列 B_i たちの成分は z の多項式となり[*3)]，N-reduced KP 方程式が得られる．ソリトン理論から見れば，(1) に相当する方程式

$$\frac{\partial}{\partial z}Y(z)=MY(z) \tag{6}$$

を (3) と両立するように追加して得られるのがモノドロミー保存変形だと言える．

ホロノミック量子場の後，モノドロミー保存変形の理論と物理との次の接点は 1990 年頃の **2 次元量子重力理論**に現れた．行列積分によって表された 2 次元量子重力の分配関数が，ソリトン方程式の解になる（同次性に関する付加条件の結果，モノドロミー保存方程式も満たす）という発見である．

ソリトン方程式の同次解がパンルヴェ型方程式を満たすことは 1970 年代後半から知られていたが，2 次元重力理論の進展の過程で，与えられたソリトン方程式と両立する方程式 (6) を相似簡約により系統的に導く手段が明確にされた．具体的には，ソリトン方程式が変数 t_k と z の適当な次数 ν_k,ν_z に対して同次式になっているとき，解も同次性をもつべし，

$$\left\{\nu_z z\frac{\partial}{\partial z}+\sum_k \nu_k t_k\frac{\partial}{\partial t_k}-\nu_Y\right\}Y(z)=0$$

と要求することで，ソリトン理論のラックス作用素 (3) と辻褄が合うように，方程式 (6) を構成することができる[*4)]．

■ 6. サイバーグ・ウィッテン曲線 ■

量子重力理論に前後して，絡み目理論，ミラー対称性など，弦理論や位相的場の理論で重要な結果が相次いで現れた．ミラー対称性では，2 次元シグマ模型のインスタントン（目標とする空間 X 内の曲線）を数え上げる母関数が X のミラー多様体の周期積分によって与えられたが，1994 年には，4 次元ゲージ理論のインスタントンの数え上げが，ある曲線上の積分によって与えられるという発見に至る．その計算に登場する曲線を **Seiberg-Witten 曲線**という．ゲージ群が $SU(2)$ の場合，Seiberg-Witten 曲線は種数 1 の楕円曲線であり，次の 2 通りの系列がある．

[Seiberg-Witten (1994)]：$D_0\sim D_4$

$$p^2=\frac{t}{q^3}+\frac{H_{D_0}}{q^2}+\frac{1}{q},$$

$$p^2=\frac{t^2}{4q^4}+\frac{a_1t}{2q^3}+\frac{H_{D_1}}{q^2}+\frac{1}{q},$$

$$p^2=\frac{t^2}{4q^4}+\frac{a_1t}{q^3}+\frac{H_{D_2}}{q^2}+\frac{a_2}{q}+\frac{1}{4},$$

$$p^2=\frac{a_1^2}{4q^2}+\frac{a_3^2}{4(q-1)^2}+\frac{ta_1}{2q}+\frac{t(a_3-2a_2)}{2(q-1)}+\frac{H_{D_3}}{q(q-1)}+\frac{t^2}{4},$$

$$p^2=\left(\frac{a_1}{q}+\frac{a_2}{q-1}+\frac{a_3}{q-t}\right)^2-\frac{\kappa q+H_{D_4}}{q(q-1)(q-t)},$$

$$\kappa=a_0^2-\left(\sum_{i=1}^3 a_i\right)^2,$$

---

*2) 量子パンルヴェ方程式については，不確定特異点を含めた拡張等が名古屋たちにより研究されている[4)]．

*3) この場合，変数 t_i は特異点の位置ではなく，$z=\infty$ での $Y(z)$ の漸近挙動 $\log Y(z)\simeq\sum_i t_i z^i$ が自然な変形パラメータを与える．

*4) このような手法で，藤・鈴木は，様々な重み付けに対するソリトン方程式の相似簡約から得られる高階パンルヴェ型方程式を系統的に研究している．これについては最後にもう一度触れる．

$$
\begin{array}{llllllllllllllllll}
6d: & E_8 & & & & & & & & & & & & & & E_1' & & \\
 & & & & & & & & & & & & & \nearrow & & & & \\
5d: & E_8 & \to & E_7 & \to & E_6 & \to & E_5 & \to & E_4 & \to & E_3 & \to & E_2 & \to & E_1 & \to & E_0 \\
4d: & E_8 & \to & E_7 & \to & E_6 & & \to & & D_4 & \to & D_3 & \to & D_2 & \to & D_1 & \to & D_0 \\
 & & & & & & & & & & & & \searrow & & \searrow & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & A_2 & \to & A_1 & \to & A_0
\end{array}
$$

図 1 $SU(2)$ ゲージ理論[5]と 2 階パンルヴェ方程式[6]の系列.

[Argyres-Douglas (1995)]：$A_0 \sim A_2$

$$
\begin{aligned}
p^2 &= q^3 + tq + H_{A_0}, \\
p^2 &= \frac{q^4}{4} + tq^2 - a_1 q - H_{A_1}, \\
p^2 &= \frac{a_1^2}{4q^2} + (a_1 + a_2) + \frac{(q+t)^2}{4} + \frac{H_{A_2}}{q}.
\end{aligned}
$$

ただし, これらの式は文献にあるものと記号が少々違っている. なぜかというと, Seiberg-Witten 曲線ではなく, パンルヴェ方程式のハミルトニアン H と正準変数 p, q の関係式 (Gaiotto 式に平方完成した形) を書いてしまったから. とはいえ間違いを書いたわけではなく, これらの式で, p, q を曲線の座標, $a_1, \cdots, a_{N_f}$ を N_f 個の物質場の質量, H をゲージ場の真空期待値 (u-パラメータ), 時間変数 t をゲージ結合定数 (または Λ-パラメータの適当なベキ), と読み替えれば Seiberg-Witten 曲線にピッタリ一致するのである*5).

さらに言えば, 5 次元 ($\mathbf{R}^4$ ×円周) や 6 次元 ($\mathbf{R}^4$ ×トーラス) への拡張もあって, それらをまとめた図 1 は, 2 階のパンルヴェ方程式の分類とちょうど対応している. ここで, 5 次元には q-差分の, 6 次元には楕円差分のパンルヴェ方程式が対応する. 4 次元の E_6, E_7, E_8 型理論 ([Minahan-Nemeschansky (1996)]) は, 強結合固定点で定義されるゲージ理論であり, モノドロミー保存変形側の対応物はリーマン球面の 3 点のみを特異点とする (連続パラメータによる変形をもたない) 差分理論である. こうした一致は, 双方に共通の幾何学的背景 (デル・ペソ曲面) から自然なことではあるが, それで何か応用があるわけではなかった.

*5) Seiberg-Witten 曲線はスペクトル曲線 (種数 g の曲線) であるが, 今は $g=1$ なので等エネルギー面 (g 次元トーラス) と同一視できる.

7. AGT 予想

AGT (Alday-Gaiotto-Tachikawa) 予想[7]とは, 一言で言えば, 4 次元超対称ゲージ理論のインスタントンを数える分配関数が 2 次元共形場理論の相関関数に一致する, という主張である*6). 物理的には弦理論による解釈があり, 数学的な証明も出つつあるが, やはり不思議な関係である. 様々な拡張が考えられているが, 最も典型的な 4 次元, $SU(2)$, $N_f = 4$ の場合に雰囲気を説明しよう.

ゲージ理論側のインスタントン分配関数は, ゲージ場の真空期待値 a, 物質場の質量 $m_1, \cdots, m_4$, ゲージ場の結合定数 $q = e^{2\pi i \tau}$, および, 積分を収束させるためのパラメータ ϵ_1, ϵ_2 の関数で

$$
Z = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(a, m_1, \cdots, m_4, \epsilon_1, \epsilon_2) q^n
$$

という展開をもつ. 各係数はヤング図形の組によってラベルされた有理式で, その分子と分母は $a, m_1, \cdots, m_4, \epsilon_1, \epsilon_2$ の簡単な 1 次式の積として具体的に与えられる (**ネクラソフの公式**[9]). 比較すべき共形場理論の相関関数は, リーマン球面上に 4 個のプライマリ場を挿入した 4 点相関関数

$$
\begin{aligned}
&\left\langle V_{h_4}(\infty) V_{h_3}(1) V_{h_2}(z) V_{h_1}(0) \right\rangle \\
&\propto \sum_{n=1}^{\infty} C_n(h, h_1, h_2, h_3, h_4, c) z^n
\end{aligned}
\tag{7}
$$

で, 各プライマリ場の次元 h_i の他, ヴィラソロ代数の中心 c と中間状態の次元 h に依存する.

*6) 立川氏による基礎からの日本語の解説がある[8].

Z_n と C_n が，パラメータ $\{a, m_1, \cdots, m_4, \epsilon_1, \epsilon_2\}$ と $\{h, h_1, \cdots, h_4, c\}$ の簡単な読み替え（例えば $c = 1 + 6\frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)^2}{\epsilon_1\epsilon_2}$）で一致するというのが予想である．$C_n$ はヴィラソロ代数だけから順次決まる量であるが，その具体形は複雑で，ネクラソフの公式のような明示式を持つことは驚きである．

8. 量子パンルヴェ方程式

AGT 予想の共形場理論側の計算で面倒なのは，挿入するプライマリ場の次元が一般の値であるため，縮退表現の場合に威力を発揮する特異ベクトルやそれに由来する微分方程式などの手段[12)]が使えない点にある．

そこで，自由フェルミオン場（比較的易しい）をプローブ（探針）[*7)]にしてイジング模型のスピン相関関数（これは難しい）を解明したホロノミック量子場の手法を援用しよう．縮退表現に従う特殊な次元のプライマリ場をプローブとして挿入し，その微分方程式を調べるのである．例えば，レベル 2 に特異ベクトルをもつ縮退表現を挿入した相関関数

$$\Psi = \left\langle V_{h_4}(\infty) V_{h_3}(1) V_{h_{2,1}}(z) V_{h_2}(t) V_{h_1}(0) \right\rangle$$

に対しては，それの従う 2 階の微分方程式

$$\begin{aligned} &\kappa(z-1)z\Psi_{zz} - (2z-1)\Psi_z \\ &+ \frac{(t-1)t}{(z-t)}\Psi_t + \left(\frac{h_3}{z-1} + h_4 - \frac{h_1}{z}\right. \\ &\left. - \frac{h_2(t^2-2tz+z)}{(z-t)^2} - h_{2,1}\right)\Psi = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

により，その級数展開が容易に調べられる．5 点相関関数 Ψ に対して，ゲージ理論側の比較すべき対応物は，ゲージ理論への面作用素の挿入[*8)]と考えられ，ネクラソフの公式に類似の組合わせ的公式が知られている．実際に低次の項を計算してみると（計算機に計算させてみると）確かにピッタリ合っていることがわかる[13)]．

共形場理論とモノドロミー保存変形との対応によると，方程式 (8) は，4 パラメータをもつ第 6 パンルヴェ方程式に対応すると期待される．実際，第 6 パンルヴェ方程式のハミルトニアン $H_{\mathrm{VI}}(q, p, t)$（本質的に $N_f = 4$ の Seiberg-Witten 曲線）から得られるシュレーディンガー方程式

$$t(t-1)\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H_{\mathrm{VI}}\left(z, \frac{\partial}{\partial z}, t\right)\Psi$$

は，若干のゲージ変換の下で，方程式 (8) と等価である．つまり，ゲージ理論の面作用素つき分配関数は**量子モノドロミー保存変形**のシュレーディンガー関数というわけである．

9. 高階化

AGT 予想の $SU(2)$ 以外のゲージ群への拡張として，W 代数による研究が進展している（さらに 5 次元版も[14)]）．それが本筋であると思うが，W 代数の計算は結構大変である．共形場理論と量子モノドロミー保存変形との対応によれば，同じことが，高階のパンルヴェ型方程式からも得られると期待される．幸いなことに，高階のモノドロミー保存変形に関する研究が（特に日本で）進展中であり，これらの成果を応用できないだろうか[*9)]．

例えば，第 6 パンルヴェ方程式の自然な高階化として，藤・鈴木[15, 16)]および津田[17, 18)]により最近構成されたモノドロミー保存変形方程式は，スペクトル曲線[*10)]の形から $SU(N)$, $N_f = 2N$ のゲージ理論に対応すると思われる．そこで，この系を素朴に量子化してみると，（多少恣意的な変換の後）次のような微分方程式が出て来る．

$$\mathcal{D}Z(y_1, \cdots, y_N) = 0. \tag{9}$$

ここで

*7) プローブという用語は文献 5) に関連して梁成吉さんに教わった．

*8) インスタントンとモノポールの両方の数え上げに相当し，4 点の KZ 方程式から[10)]，あるいは $SU(2) \times SU(2)$ ゲージ理論の特殊化[11)]によっても得られる．

*9) 実際，弦理論などで，モノドロミーは重要な役割を果たしている．例えばブレイン相互のモノドロミーはブレインを特徴づける上で本質的な性質である．

*10) 非自励系なので保存量にはならないが，ラックス形式から近似的なスペクトル曲線が考えられる．

$$\begin{aligned}\mathcal{D} = \Delta &+ \sum_{i=1}^{N} u_i \vartheta_i \\ &+ \left(\prod_{j=1}^{N} y_j\right)\left(\Delta + \sum_{i=1}^{N} v_i\vartheta_i + \sum_{i=1}^{N} r_i s_i\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{N}\left\{\left(\sum_{k=0}^{N-2}\prod_{j=0}^{k} y_{i+j}\right)\right. \\ &\qquad \left. \times (\vartheta_{i-1} - \vartheta_i + r_i)(\vartheta_{i-1} - \vartheta_i + s_i)\right\},\end{aligned}$$

u_i, v_i, r_i, s_i は定数，$\Delta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\vartheta_i - \vartheta_{i+1})^2$，$\vartheta_i = y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$, $y_{i+N} = y_i$ である．

この方程式 (9) の級数解

$$Z = \sum_{k_1,\cdots,k_N \geq 0} C_{k_1,\cdots,k_N} y_1^{k_1} \cdots y_N^{k_N}$$

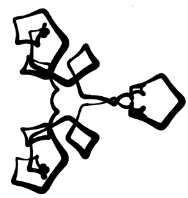
を調べてみると，ゲージ理論側で予想される結果と良く一致している[19]．高階パンルヴェ型方程式には，上記の他にも笹野[20]による興味深い方程式などが構成されており，それらにも応用があれば大変嬉しい．

参考文献

1) 岡本和夫著『パンルヴェ方程式』岩波書店 (2009).
2) 神保道夫著『ホロノミック量子場』岩波講座　現代数学の展開，岩波書店 (1998).
3) M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno, "Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients: I. General theory and τ-function", *Physica D***2**, (1981) 306–352; M. Jimbo and T. Miwa, "–II", *Physica D***2**, (1981) 407–448; "–III", *Physica D***4**, (1981) 26–46.
4) H. Nagoya, "Hypergeometric solutions to Schrödinger equations for the quantum Painlevé equations", *J. Math. Phys.* **52**, DOI: 10.1063/1.3620412.
5) M. Noguchi, S. Terashima and S.K. Yang, "$N = 2$ Superconformal field theory with ADE global symmetry on a D3-brane probe", *Nucl. Phys. B***556** (1999) 115–151. arXiv:hep-th/9903215.
6) H. Sakai, "Rational surfaces with affine root systems and geometry of the Painlevé equations", *Commun. Math. Phys.* **220** (2001) 165–221.
7) L.F. Alday, D. Gaiotto and Y. Tachikawa, "Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories", *Lett. Math. Phys.* **91**, 167 (2010), arXiv:0906.3219 [hep-th].
8) Y. Tachikawa,「四次元ゲージ理論と二次元共形場理論の不思議な関係」arXiv:1108.5632 [hep-th].
9) N.A. Nekrasov, "Seiberg-Witten Prepotential From Instanton Counting", *Adv. Theor. Math. Phys.* **7**, 831 (2004), arXiv:hep-th/0206161.
10) L.F. Alday and Y. Tachikawa, "Affine $SL(2)$ conformal blocks from $4d$ gauge theories", arXiv:1005.4469 [hep-th].
11) M. Taki, "Surface Operator, Bubbling Calabi-Yau and AGT Relation", arXiv:1007.2524 [hep-th].
12) 伊藤克司著『共形場理論—現代数理物理の基礎として』SGC ライブラリ 83 サイエンス社 (2011); see also 山田泰彦著『共形場理論入門』培風館 (2006).
13) H. Awata *et al.* "Localization with a surface operator, irregular conformal blocks and open topological string", arXiv:1008.0574 [hep-th].
14) H. Awata *et al.* "Notes on Ding-Iohara algebra and AGT conjecture", arXiv:1106.4088 [math-ph].
15) K. Fuji and T. Suzuki, "Drinfeld-Sokolov hierarchies of type A and fourth order Painlevé systems", *Funkcial. Ekvac.* **53** (2010) 143–167, arXiv:0904.3434 [math-ph].
16) T. Suzuki, "A class of higher order Painlevé systems arising from integrable hierarchies of type A", arXiv:1002.2685 [math.QA].
17) T. Tsuda, "From KP/UC hierarchies to Painlevé equations", arXiv:1004.1347 [nlin.SI].
18) T. Tsuda, "UC hierarchy and monodromy preserving deformation", arXiv:1007.3450 [math.CA].
19) Y. Yamada, "A quantum isomonodromy equation and its application to $SU(N)$ gauge theories", *J. Phys. A***44** 055403 (2011), arXiv:1011.0292 [hep-th].
20) Y. Sasano, "Higher order Painlevé equations of type $D_l^{(1)}$", 数理解析研究所講究録 **1473** (2006) 143–163.

（やまだ・やすひこ，神戸大学大学院理学研究科）

3次元Calabi–Yau圏と量子dilog関数



長尾　健太郎

1. はじめに

有理関数体 $\mathbb{C}(q)$ に係数を持つ形式的冪級数

$$\Phi_q(y) := \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2/2}}{(q^n - 1) \cdot \cdots \cdot (q^n - q^{n-1})} y^n$$

を**量子 dilog 関数**と呼ぶ．量子 dilog 関数の特徴の1つは，以下の五角形関係式である：

> $y_1 y_2 = q^2 y_2 y_1$ を満たす変数 y_1, y_2 に対して，
>
> $$\Phi_q(y_1)\Phi_q(y_2) = \Phi_q(y_2)\Phi_q(q y_2 y_1)\Phi_q(y_1).$$

量子 dilog 関数は
- R 行列，量子不変量，および
- 量子 Teichmüller 理論

の構成などにおいて用いられてきた．五角形関係式をはじめとする関数等式は，これらの応用の際に鍵となる．

さて，上では天下り的に定義を与えたが，そもそも量子 dilog 関数とは何なのか？ そして，量子 dilog 関数を重要たらしめている諸々の良い性質・関数等式は「なぜ」成り立っているのか？

本稿では，

> 量子 dilog 関数は **3 次元 Calabi–Yau 圏**の理論を通じて理解すべきである

という立場から，上の問い掛けに対する 1 つの答えを与える．両者を繋ぐのは **Donaldson–Thomas**（以下，DT）**理論**である．

2. Donaldson–Thomas 理論

2.1 導来圏と安定性条件 (1)

DT 不変量は多様体（特に 3 次元 Calabi–Yau 多様体）上の連接層のモジュライを通じて定義される不変量である．モジュライを構成するためには，「安定性条件」を導入して安定な連接層だけを考える必要がある．安定性条件の取り替え（壁越え）に対して，理論がどのように変化するかは重要な問題である．

さて，多様体上の連接層全体はアーベル圏をなす．与えられたアーベル圏 $\mathcal{A}$ に対して，その**導来圏** $D(\mathcal{A})$ が定義される[*1]．与えられた導来圏 D に対して，$D = D(\mathcal{A})$ となる $\mathcal{A}$ は必ずしも 1 つではない．アーベル圏 $\mathcal{A}$ を復元するためには導来圏の **t 構造**というデータが必要である．t 構造により復元されたアーベル圏を，その t 構造の**核**という．

実は「安定性条件」の理論はアーベル圏よりも寧ろ導来圏に対して展開することが重要である．導来圏の安定性条件とは，t 構造とその核の上の安定性条件の組である．すなわち，導来圏の安定性条件の壁越えを通じて，異なる 2 つの t 構造の間の関係を理解することができる．

2.2 導来圏と安定性条件 (2)

この小節では，前小節とは少し違った視点から

*1) この論説では「導来圏は元のアーベル圏を含む，より大きな圏である」という程度の認識を持っていてもらえればよい．

安定性条件の再導入を行う．

Kontsevich はシンプレクティック多様体 X の深谷圏の導来圏*2) と X のミラー複素多様体 Y の連接層の導来圏の同値としてミラー対称性を定式化することを提唱した（ホモロジー的ミラー対称性）．そもそものミラー対称性とは X から定まる弦理論（A 模型）と Y から定まる弦理論（B 模型）との等価性であったから，X や Y そのものからではなくその導来圏から弦理論が展開されるべきと考えられるようになった．

A 模型における拡大ケーラーモジュライはミラー対称性における重要な概念である．導来圏から出発して拡大ケーラーモジュライの対応物を構成することはできるだろうか？ その答えとして，Douglas は D ブレインに対して「安定性」の概念を提唱した．これを数学的に定式化したものが Bridgeland 安定性条件，すなわち前小節で紹介した導来圏の安定性条件である．安定性条件全体の空間には複素多様体の構造が入り，これが拡大ケーラーモジュライを実現すると期待される．さて，安定性条件全体の空間が複素多様体であるならば，その上の正則関数を構成することはできないだろうか？

2.3 安定性条件と DT 理論

導来圏の安定性条件を 1 つ選ぶと，t 構造およびその導来圏の対象が「安定であるか否か」が定まる．t 構造の核の安定な対象のモジュライ空間上の交差理論によって定義される不変量を **Donaldson–Thomas**（DT）**不変量**と呼ぶ．特に 3 次元 Calabi–Yau 多様体上の連接層の導来圏の場合，モジュライ空間の仮想次元は 0 となり，DT 不変量とは安定な対象を「数え上げ」たものである*3)．

安定性条件全体の空間には部屋構造が入る．安定性条件を動かして壁を越えると，安定対象のモジュライ空間が変化し，したがって DT 不変量が変化する．これを DT 不変量の**壁越え現象**という．Joyce は DT 不変量の壁越え理論を確立し，その応用として DT 不変量の生成関数を用いて安定性条件の空間上の正則関数を構成した[3]．

Joyce の構成は複雑なので，Bridgeland による Joyce の仕事の解釈[2]を紹介する．未定義用語が並ぶ上に，後の内容とは独立なので，気楽に読み流していただきたい．

壁越え現象は，**モノドロミー保存変形**における**ストークス現象**と同じ構造を持つ．安定性条件の空間が微分方程式の変形パラメータの空間に対応し，中心電荷*4) の値域の $\mathbb{C}$ が微分方程式が定義される $\mathbb{C}$ に対応する．中心電荷の偏角を固定して安定対象のモジュライ空間の仮想数え上げの生成関数を考えると，それがストークス・データに対応する．

さて，与えられたモノドロミー保存変形からストークス・データを計算する問題の逆問題を解くことができる．壁越え現象により得られたストークス・データの類似物にこの逆問題を適用すると，モノドロミー保存変形が得られる．この方程式の係数が Joyce の構成した正則関数に他ならない．

2.4 モチーフ的 DT 理論

前小節で紹介したように，DT 不変量は導来圏の理論，特に安定性の理論において重要な役割を果たすと期待されているが，そもそも DT 理論が注目を集めるようになったきっかけは，DT 理論と Gromov–Witten（以下，GW）理論の等価性を主張した MNOP 予想[7]である．トーリック 3 次元 Calabi–Yau 多様体の場合には，GW 不変量と DT 不変量は共に **topological vertex** の手法で計算され，MNOP 予想は正しい．

物理的要請によると，topological vertex には **refined topological vertex** と呼ばれる 1 パラメータ変形が存在する．現在のところ refined topological vertex は組合せ的に定義されているだけで，幾何学的定義は存在しない．

*2) 深谷圏はアーベル圏ではなくて A^∞ 圏と呼ばれるものなので，ここでの「導来圏」というのは上とは少し違った意味で用いられている．

*3) 微分幾何的かつ直感的に言えば，理論を適切に摂動することによりモジュライ空間は重み $+1$ または -1 が割り当てられた有限個の点になる，ということに対応する．点の数を重みつきで数え上げたものが DT 不変量である．

*4) 導来圏の Grothendieck 群から $\mathbb{C}$ へのある条件を満たす群準同型を中心電荷という．

さて，MNOP 予想の下で，対応する DT 理論の変形を幾何学的に実現していると期待されるのが**モチーフ的 DT 理論**である．モチーフ的 DT 不変量とはモジュライ空間の**仮想モチーフ**のことである．仮想モチーフの Euler 数が従来の DT 不変量であり，仮想モチーフの E 多項式を取ることで 1 パラメータ変形が得られると期待される．

Kontsevich–Soibelman はモチーフ的 DT 不変量を導入し，仮想モチーフに関するある予想の上に壁越え理論を構築した[6]．この論説では Kontsevich–Soibelman の予想を認めて話を進めることにする[*5)]．

2.5 球面的対象と量子 dilog 関数

3 次元 Calabi–Yau 多様体上の連接層 A,B に対して，Serre 双対性

$$\mathrm{Ext}^i(A,B) \simeq \mathrm{Ext}^{3-i}(B,A)^*$$

が成り立つ．上の双対性を満たす導来圏を **3 次元 Calabi–Yau 圏**という．

導来圏の対象 s が **3 次元球面的**であるとは，$\mathrm{Ext}^\bullet(s,s)$ が 3 次元球面のコホモロジー環と同型であることをいう．3 次元 Calabi–Yau 圏のある t 構造の核の対象が 3 次元球面的であることと，非自明な自己同型 $\mathrm{Ext}^0(s,s)$ および非自明な自己拡大 $\mathrm{Ext}^1(s,s)$ を持たないことは同値である，すなわち 3 次元球面的対象は 3 次元 Calabi–Yau 圏において「最も単純な構造を持つ」対象である．

3 次元球面的対象 s に対して，s で生成される充満部分圏を考える．この部分圏の対象は $s^{\oplus n}$ (n は非負整数) という形をしており，モジュライスタックは

$$\coprod_{n\geq 0}[\mathrm{pt}/\mathrm{GL}(n)]$$

と表される．ここで分母に現れる $\mathrm{GL}(n)$ は $s^{\oplus n}$ の自己同型群である．その E 多項式の母関数は量子 dilog 関数

$$\Phi_q(y) = \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2/2}}{(q^n-1)\cdot\cdots\cdot(q^n-q^{n-1})} y^n$$

*5) 彼らの壁越え理論は特殊な場合に正当化されている[10]．

となる．

すなわち，DT 理論において

量子 dilog 関数 = 3 次元球面的対象の寄与

である．これが本稿の大前提となる基本原理である．

3. ポテンシャル付き箙と DT 理論

3.1 ポテンシャル付き箙

与えられた箙 Q に対して，閉じた道の線形結合 W を**ポテンシャル**と呼ぶ．ポテンシャル付き箙 (Q,W) に対して次数付き微分代数 $\Gamma_{Q,W}$ が定義される (**Ginzburg の次数付き微分代数**)．$\Gamma_{Q,W}$ 上の次数付き微分加群の導来圏は 3 次元 Calabi–Yau 圏となる．この意味において，ポテンシャル付き箙は 3 次元 Calabi–Yau 多様体の類似とみなすことができる．

$\Gamma_{Q,W}$ の次数 0 のコホモロジーを取って得られる結合代数 $J_{Q,W}$ を **Jacobi 代数**という．Jacobi 代数上の加群のなすアーベル圏は導来圏の t 構造の核を与える．

3.1.1 例 1：$\mathbb{C}^3$

図 1 左の箙とポテンシャル $xyz - xzy$ を考える．Jacobi 代数は 3 変数多項式環 $\mathbb{C}[x,y,z]$ である．

3.1.2 例 2：コニフォールド

図 1 中央の箙とポテンシャル

$$a_1b_1a_2b_2 - a_1b_2a_2b_1$$

を考える．Jacobi 代数はコニフォールド特異点の非可換クレパント解消を与える．特に Jacobi 代数

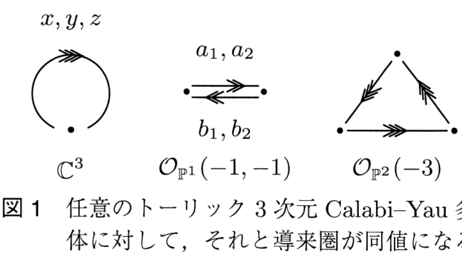


図 1 任意のトーリック 3 次元 Calabi–Yau 多様体に対して，それと導来圏が同値になるようなポテンシャル付き箙が存在する．

上の加群の導来圏は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1,-1)$ 上の連接層の導来圏と同値である．

3.1.3 例 3：局所射影平面

図 1 右の箙とポテンシャル

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\alpha_{\sigma(1)}\beta_{\sigma(2)}\gamma_{\sigma(3)}$$

を考える．Jacobi 代数上の加群の導来圏は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)$ 上の連接層の導来圏と同値である．

3.2 ポテンシャル付き箙に付随する DT 不変量

前節では，ポテンシャル付き箙は 3 次元 Calabi–Yau 多様体の類似とみなせると述べた．そこで以下ではポテンシャル付き箙に対する DT 理論を考える．

ポテンシャル付き箙 (Q,W) と $\boldsymbol{v}\in Z^I$ に対して，次元ベクトル $\boldsymbol{v}$ の $J_{Q,W}$ 加群のモジュライスタックを $\mathfrak{M}(\boldsymbol{v})$ とおき，その仮想モチーフの E 多項式を $m_q(\boldsymbol{v})$ とおく．$m_q(\boldsymbol{v})$ の生成母関数

$$\mathcal{Z}^q_{Q,W}(\boldsymbol{y}):=\sum_{\boldsymbol{y}\in L}m_q(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{v}}$$

を考える．

例えば $\mathbb{C}^3$ に対応する箙について，母関数は

$$\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{j=0}^{\infty}(1-q^{1-j}y^n)^{-1}$$

となる*6)．これを $C(y,q)$ とおく．

3.3 量子トーラス

箙 Q の頂点集合を I とし，

$$L_Q=\oplus_{i\in I}\mathbb{Z}\cdot v_i,\quad M_Q=\oplus_{i\in I}\mathbb{Z}\cdot w_i$$

とおく．L_Q 上には Euler 形式 χ が

$$\chi(v_i,v_j)=Q_{ij}-Q_{ji}$$

で与えられている．但し Q_{ij} で頂点 i から頂点 j への矢印の本数を表すとする．箙 Q に対して，

$$QT_Q:=\bigoplus_{\boldsymbol{v}\in L_Q}C(q)y_{\boldsymbol{v}},$$

上の積を

$$y_{\boldsymbol{v}}\cdot y_{\boldsymbol{v}'}=q^{\chi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')/2}y_{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'}$$

で定め，Q に付随する**量子トーラス**と呼ぶ．また，

$$\chi(v_i,w_j)=\delta_{i,j},\quad \chi(w_i,w_j)=0$$

により χ を $L_Q\oplus M_Q$ に拡張し，

$$DQT_Q:=\bigoplus_{\boldsymbol{v}\in L_Q}C(q)y_{\boldsymbol{v}}\oplus\bigoplus_{\boldsymbol{w}\in M_Q}C(q)x_{\boldsymbol{w}}$$

上に積を同様に定めたものを Q に付随する**量子二重トーラス**と呼ぶ．

3.4 随伴作用と古典極限

仮想モチーフの E 多項式 $m_q(\boldsymbol{v})$ は $q^{1/2}$ の有理式であり，一般には極を持つので，そのままでは古典極限 $q^{1/2}\to-1$ を取ることができない．古典極限の取り方として，以下の 2 通りが知られている：

- 生成母関数の log を取る（Joyce）．
- 量子二重トーラスの随伴表現を考える（Kontsevich–Soibelman）．

ここでは後者を採用する．

DT 不変量の母関数に関する随伴を取ることで得られる量子二重トーラスの自己同型

$$\mathcal{DT}^q_{Q,W}:=\mathrm{Ad}(\mathcal{Z}^q_{Q,W}(\boldsymbol{y}))$$
$$=(\mathcal{Z}^q_{Q,W}(\boldsymbol{y}))^{-1}\times(\bullet)\times(\mathcal{Z}^q_{Q,W}(\boldsymbol{y}))$$

を考える*7)．古典極限を取って得られる Poisson 自己同型を $\mathcal{DT}_{Q,W}$ とおく．

例えば $\mathbb{C}^3$ の場合，

$$\mathcal{DT}^q_{Q,W}(x)=C(y,q)^{-1}\cdot x\cdot C(y,q)$$

を展開して $q^{n/2}xy^n=q^{-n/2}y^nx$ を y^n で置き換えると

$$\frac{C(q^{1/2}y,q)}{C(q^{-1/2}y,q)}$$

となる．極限 $\lim_{q^{1/2}\to-1}$ をとると

*6) コニフォールドに対応する箙についての計算は文献 8) で行われている．局所射影平面に対応する箙についての母関数の明示的表示は知られていない．

*7) 母関数は無限和なので量子二重トーラスの元ではないが，量子二重トーラスを適切に完備化することで正当化できる．

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-y^n)^{-n}$$

となる．右辺は **McMahon 関数**と呼ばれ，3 次元 Young 図形の数え上げ母関数である．

トーラス作用に関する局所化により，$\mathbb{C}^3$ 上の**点の Hilbert スキーム**の数え上げ不変量の母関数は 3 次元 Young 図形の数え上げ母関数と等しい．実は，任意のポテンシャル付き箙に対し量子二重トーラスの随伴自己同型は Hilbert スキームに対応する．

3.5 BPS 状態の数え上げ

量子 dilog 関数 $\Phi^q(\boldsymbol{y_v})$ に関する随伴を取ることで得られる量子トーラスの自己同型 $\mathrm{CT}^q_{\boldsymbol{v}}$，その古典極限を $\mathrm{CT}_{\boldsymbol{v}}$ とおく*8)．すなわち $\mathrm{CT}^q_{\boldsymbol{v}}$ および $\mathrm{CT}_{\boldsymbol{v}}$ は 1 つの 3 次元球面的対象が誘導する自己同型である．

（十分に一般的な）中心電荷 Z に対して，DT 不変量から得られる自己同型を $\mathrm{CT}_{\boldsymbol{v}}$ たちで展開できると予想されている：

$$\mathcal{DT}_{Q,W}=\prod^{\curvearrowleft}(\mathrm{CT}_{\boldsymbol{v}})^{\Omega^Z(\boldsymbol{v})}\quad(\Omega^Z(\boldsymbol{v})\in\mathbb{Z}).$$

但し，積は中心電荷の偏角の順に取るものとする．

ここで念頭に置いているのは，以下のような 3 次元 Calabi–Yau 圏である：

- 各 $\boldsymbol{v}\in L$ 上に $\Omega^Z(\boldsymbol{v})$ 個の 3 次元球面的対象があり，
- それらの間に非自明な Ext^1 は存在しない．

無論実際の圏はこのような単純な構造ではないから，$\Omega^Z(\boldsymbol{v})$ という数は実際に何かを数え上げているわけではない．しかし，上の展開は

> 少なくとも DT 不変量のレベルでは $\Omega^Z(\boldsymbol{v})$ 個の 3 次元球面的対象があるように見える

と言っている．$\Omega^Z(\boldsymbol{v})$ は「**BPS 状態の数え上げ**」を数学的に定式化したものであると期待されている．

*8）これは本質的に**量子クラスター変換**と呼ばれるものである．

4. 箙の変異と壁越え公式

前節では DT 理論を通じて，謂わば「見かけの 3 次元球面的対象」を数え上げた．

以下では実際の 3 次元球面的対象たちに着目し，それらの圏論的振舞いを考察することにより量子 dilog 関数の性質を調べる，

4.1 箙の変異と導来圏同値

k は箙 Q のループを持たない頂点とし，W は十分に一般的なポテンシャルとする．このときポテンシャル付き箙 (Q,W) の k における**変異** (μ_kQ,μ_kW) が定義される．変異の定義はここでは省略するが，重要なことは元のポテンシャル付き箙と変異後のポテンシャル付き箙は導来圏同値であるということである．変異に付随して Φ_k^+ と Φ_k^- の 2 つの導来圏同値（Keller–Yang の導来圏同値）が存在する[5]．

ポテンシャル付き箙の変異は以下の意味で安定性条件の空間における壁越えである．s_k を頂点 k に対応する単純 $J_{Q,W}$ 加群とする．安定性条件を動かし，s_k の中心電荷の虚部が正から負に変わる状況を考える．このとき新しい t 構造の核が得られる．

s_k の中心電荷が第一象限から第四象限へ移る場合，s_k の代わりにそのシフト $s_k[1]$ を含むような新しい t 構造の核が得られる．これは Φ_k^+ による J_{μ_kQ,μ_kW} 加群の圏の引き戻しと一致する（図 2）．

このようなとき，t 構造の核 $(\Phi_k^+)^{-1}(J_{\mu_kQ,\mu_kW})$ は単純加群 s_k による傾斜（tilting）で得られるという*9)．

s_k の中心電荷が第二象限から第三象限へ移る場合は Φ_k^- に対応する．このとき新しい t 構造の

*9）一般に t 構造の核 $\mathcal{A}$ の充満部分圏の組 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ が以下を満たすとき，**捩れ対**（torsion air）であるという：

- 任意の $T\in\mathcal{T}$ および $F\in\mathcal{F}$ に対して，$\mathrm{Hom}(T,F)=0$.
- 任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して短完全系列

$$0\to T\to A\to F\to 0$$

$(T\in\mathcal{T},\,F\in\mathcal{F})$ が存在する．

捩れ対が与えられると，新しい t 構造が構成される．s_k の中心電荷が第一象限から第四象限へ移る場合，s_k の直和からなる部分圏を $\mathcal{F}$ とするような捩れ対を考えればよい．

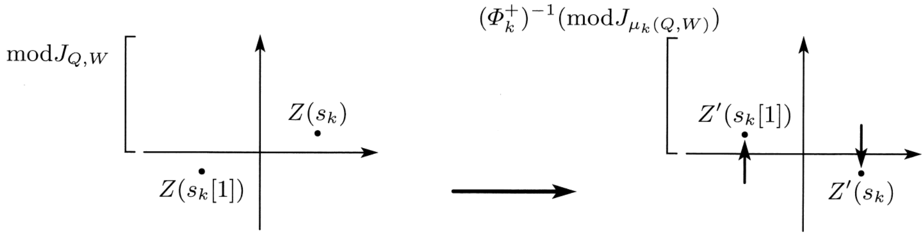


図 2　箙の変異に伴う導来圏同値は安定性条件の空間における“壁越え”である．

核には s_k の代わりにそのシフト $s_k[-1]$ が含まれる．

4.2 変異と壁越え公式

前節で，箙の変異によって得られる 2 つの t 構造の核の関係は，単純加群 s_k とそのシフト $s_k[\pm 1]$ のやりとりであると述べた．頂点 k はループを持たないと仮定したので，単純加群 s_k の寄与は量子 dilog 関数に他ならない．箙 (Q,W) に対する DT 不変量とその変異 $\mu_k(Q,W)$ に対する DT 不変量の関係として，以下を得る：

$$\boxed{\Phi^q(\boldsymbol{y}_{-\boldsymbol{v}}) \times \mathcal{Z}^q_{Q,W} = \mathcal{Z}^q_{\mu_k(Q,W)} \times \Phi^q(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{v}}).}$$

4.3 箙の変異の反復

安定性条件の空間の中で壁越えを繰り返す，すなわち箙の変異を繰り返すことを考える．

(Q,W) をポテンシャル付き箙, $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_l)$ を頂点の列とし，変異の繰り返しで得られる箙を $\mu_{\boldsymbol{k}}(Q,W)$ とおく．Keller–Yang の導来圏同値を合成することにより (Q,W) と $\mu_{\boldsymbol{k}}(Q,W)$ の導来圏同値 $\Phi_{\boldsymbol{k}}$ が得られる*10)．$\mathrm{mod}(J_{(Q,W)})$ の捩れ対 $(\mathcal{T}_{\boldsymbol{k}},\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}})$ が存在して，$\Phi_{\boldsymbol{k}}$ による $\mathrm{mod}(J_{\mu_{\boldsymbol{k}}(Q,W)})$ の引き戻しはこの捩れ対による傾斜で得られる．$\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}$ の対象のモジュライの仮想モチーフの E 多項式の生成母関数を $\mathcal{Z}^q_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}}$ とおくと，

$$\boxed{\mathcal{Z}^q_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}[1]} \times \mathcal{Z}^q_{Q,W} = \mathcal{Z}^q_{\mu_{\boldsymbol{k}}(Q,W)} \times \mathcal{Z}^q_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}}}$$

が成り立つ．$\mathcal{Z}^q_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}}$ は量子 dilog 関数の積で表される．

4.4 周期性と量子 dilog 恒等式

箙の変異は安定性条件の空間における壁越えであると述べた．壁越えを繰り返した結果，元の部屋に戻ってきたと仮定する（図 3）．このときこの箙は「強い意味で**周期**を持つ」ということにする．

このとき $\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}=\emptyset$ なので，量子 dilog 関数の積は 1 となる（量子 dilog 恒等式[4]）．冒頭で紹介した五角形関係式は A_2 型箙に対応する量子 dilog 恒等式である．

強い意味で周期性を持つ箙の典型例は 2 つの Dynkin 箙の積である．このような箙の周期性は Y-system の周期性と等価である．

4.5 曲面の三角形分割と DT 理論

頂点の列に対して変異を繰り返した後のポテンシャル付き箙が元のポテンシャル付き箙と一致したとする．Keller–Yang の同値の合成は，導来圏の自己同値を与える．前節ではこの自己同値が恒等関手となる場合について考察した．自己同値が恒等関手ではない場合（「弱い意味で周期を持つ」ということにする），式は

$$\mathcal{Z}^q_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}[1]} \times \mathcal{Z}^q_{Q,W} = \mathcal{Z}^q_{Q,W} \times \mathcal{Z}^q_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}} \qquad (1)$$

となり，DT 不変量の生成関数に制約を与える．

弱い意味で周期を持つ箙の典型例は曲面の三角形分割に付随するポテンシャル付き箙である．このポテンシャル付き箙に付随する導来圏には写像類群が作用する．この状況で式 (1) を適用する．量子トーラス上に写像類群の作用が入り，DT 不変量の生成関数はこれらの元の作用について不変であることが分かる*11)．

曲面の三角形分割に付随する箙は**量子 Teichmüller 理論**の構成において登場した．曲面の三角形分割に付随するポテンシャル付き箙に対する

*10)　正確には頂点の列 $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_l)$ に対して符号の列 $\varepsilon(1),\ldots,\varepsilon(l)$ が定まり，この符号に従って Φ_k^+ または Φ_k^- を合成したものがここで述べた性質を持つ．

*11)　写像類群の作用から得られる制約が生成関数をどの程度決定するかについてはよく分かっていない．

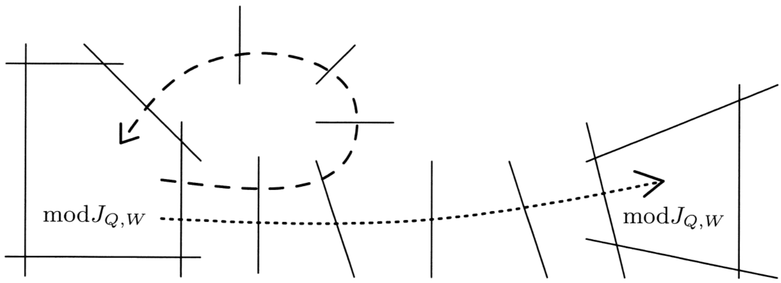


図 3 強い意味での周期（破線）と弱い意味での周期（点線）.

3 次元 Calabi–Yau 圏および DT 理論について，曲面の幾何の文脈でこれらに解釈を与えることは今後の課題であろう．

5. 結び

本稿では「量子 dilog 関数＝3 次元球面的対象」という立場から理解できる現象をいくつか紹介してきた．特に後半では，3 次元 Calabi–Yau 圏の性質を通じて量子 dilog 関数の性質が理解できることを紹介した．このように，ある現象を圏論的命題に持ち上げて議論することを**圏化**という．

圏化はしばしば現象の本質を捉えていて，思わぬ副産物を生むことがある．本稿で紹介した圏化のクラスター代数の理論への応用は文献 9) を参照されたい．量子 dilog 関数の圏化は今後数学・物理の様々な場面で我々を正しい理解へと導いてくれるであろう．そのような期待を込めて，量子 Teichmüller 理論に関する 2 つのトピックを紹介して，筆を置かせていただくことにする．

5.1 量子 Teichmüller 理論と共形ブロック

Teschner によって解決された Verlinde 予想によれば，量子 Teichmüller 理論は Virasoro 共形ブロックを与える．Fock–Goncharov の高階量子 Teichmüller 理論は $\mathcal{W}_N$ 共形ブロックを与えていると期待される．$6(=4+2)$ 次元の弦理論を通じた 4 次元の場の量子論と 2 次元の共形場理論の関係を指摘した Alday–Gaiotto–立川（AGT）予想[1)]によれば，Virasoro および $\mathcal{W}_N$ 共形ブロックは $\mathbb{R}^4$ 上のインスタントン分配関数と一致する．AGT 予想については本特集の山田氏の解説を参考にされたい．

5.2 3 次元多様体と量子 Teichmüller 理論

与えられた写像類に対してその写像錘を取ることで 3 次元多様体が得られる．このような 3 次元多様体に対して，その不変量が “TQFT 的” に構成できることが期待される．寺嶋–山崎は量子 Teichmüller 理論における写像類の作用のトレースの漸近挙動が写像錘の双曲体積と一致することを発見した[11)]．この発見の背景にあるのは AGT 予想の $3+3$ 類似，すなわち $6(=3+3)$ 次元の弦理論を通じた 3 次元の場の量子論と 3 次元の双曲幾何との関係である[12)]．Jones 多項式の漸近挙動と双曲体積の一致を主張する Kashaev の体積予想との関わりも期待される．体積予想については本特集の藤氏の解説を参考にされたい．

参考文献

1) L.F. Alday, D. Gaiotto, and Y. Tachikawa, *Lett. Math. Phys.* **91** (2010), 167–197.
2) T. Bridgeland and V. Toledano Laredo, *Invent. Math.*, DOI: 10.1007/s00222-011-0329-4.
3) D. Joyce, *Geometry and Topology* **11** (2007), 667–725.
4) B. Keller, arXiv:1102.4148.
5) ——— and D. Yang, arXiv:0906.0761.
6) M. Kontsevich and Y. Soibelman, arXiv:0811.2435v1.
7) D. Maulik, N. Nekrasov, A. Okounkov, and R. Pandharipande, *Comp. Math.* **142** (2006), 1263–1285.
8) A. Morrison, S. Mozgovoy, K. Nagao, and B. Szendroi, arXiv:1107.5017.
9) K. Nagao, arXiv:1002.4884.
10) ———, arXiv:1103.2922.
11) Y. Terashima and M. Yamazaki, arXiv:1106.3066.
12) ———, *JHEP*, **1108**:135,2011.

（ながお・けんたろう，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

桜 井　邦 朋

1982年1月号



30年前に書かせて頂いた「「28」は秘密の数か？」の中で，メドスン・ホィールにふれたのだが，その写真は，エディ（J.A. Eddy）博士から分けてもらったものであった．

この人は考古天文学（Archaeoastronomy）と呼ばれる研究分野のパイオニアの一人だが，彼を有名にしたのは，太陽活動にみられる極端な衰退期であった「マウンダー極小期」（Maunder Minimum）の発見と研究であった．1645年から1715年にかけての70年は，太陽では無黒点期，地球では気候の極端な寒冷期であった．

彼の論文は「マウンダー極小期」と題して1976年に，*Science* 誌に発表されたが，その前年の11月にNASAゴダード宇宙飛行センター（GSFC）で開かれた「太陽研究の将来」と題した国際会議における招待講演で，初めて語られたのであった．出席者にとっては耳にするのが初めてのことで，まさかこんなことがと半信半疑であった．当時，このセンターで働いていた私も出席しており，講演を聴いたのだが，こんなことってあるのかというのが実感であった．

会議後，詳しく知り勉強したくなった私はエディに手紙を直接書き，後に *Science* 誌に発表された論文原稿のコピーと，この方面の研究への手引きとなる手紙とを，彼からもらったのであった．本当に有難く嬉しいことであった．これがきっかけとなり，彼とのつき合いが始まり，太陽活動の長期変動が地球環境に及ぼす影響や気候変動の原因について，私も勉強を始めたのであった．

エディ博士との出会いと彼からの影響については，先頃出版した『移り気な太陽—太陽活動と地球環境との関わり』（恒星社厚生閣）の「あとがき」でふれているが，彼の講演を聴くことがなかったら，この方面の研究に私が踏みこむことは多分なかった．

彼は一度我が国を訪れたが，その折に一週間余り一緒に旅行することができ，仕事他彼から受けた影響についてもふれながらいろいろと話すことができ，私には忘れられない想い出となっている．太陽研究に，また考古天文学に関わった研究に，さらに天文学の歴史の研究にと多方面にわたって大きな業績をあげられたエディ博士は，2009年6月10日に亡くなった．残念なことである．

この人が創始した太陽活動の過去数千年にわたる長期変動の気候に及ぼす影響についての研究成果が出発点となって，現在懸念されている地球温暖化をめぐる研究にまで，その影響が及んでいることを想起したい．

（さくらい・くにとも，神奈川大学名誉教授）

R.P. Feynman

とらわれない発想

江沢　洋

1. つきとめる喜び

R.P. Feynman は 1918 年（大正 7 年），ニューヨーク市に生まれた．小さかった頃，親父はよく彼をキャツキル山の林に連れて行った．「見てごらん」と親父は言った．「あの鳥は羽をくちばしでつついている．何故だろう？」

「飛んでいるうちに羽がめちゃくちゃになったから整えているんだろう」と Feynman.「なるほど，それなら羽をつつくのは飛んだあとだけだろうね．よく見てみよう」と親父．よく見ると，地面を歩いている鳥と，いま降りてきたばかりの鳥と，大した違いはなかった．「降参だ，わからない」と Feynman が言うと，親父が解説する．「あれはね，シラミがいて痒くて仕方ないからなんだ．シラミは鳥の羽のタンパク質を食べている．そのシラミの足にはロウみたいなものが浸み出していて，それをダニが食う．ダニが出した糖みたいなものをバクテリアが食うんだ.」

親父が言ったことは正確ではなかったかもしれないと Feynman は回想している．しかし，親父が話してくれた根本原理は正しかったのだ[1]．

彼はラジオ少年に育つ[2]．どこが故障か考えるだけで見つけてしまう少年であった．

MIT に入って 2, 3 年して帰省したとき親父が訊ねた，「原子が状態を変えるとき出す光子とやらは，出てくる前から原子の中にあったのかい？」Feynman が「いや，そうじゃない」と答えると「じゃあ一体どこから出てくるんだね？」と親父．満足な答えができない息子に親父は不満だった．「せっかく大学に入れて教育を受けさせたのに！」[1]

2. 原子間力の古典像

Feynman は MIT の学部学生のとき，化学結合した原子の間の力は，古典的な電気力として計算してよいということを証明した[3]．

簡単のために，H_2^+ イオンを例にとろう．2 つの原子核 H^+ は直角座標系 O-xyz で $\boldsymbol{R}_+ = (0, 0, \lambda)$, $\boldsymbol{R}_- = (0, 0, -\lambda)$ に固定されているとすれば分子のハミルトニアンは

$$H_\lambda = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{r};\, \lambda). \qquad (2.1)$$

ここで

$$V = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_+|} + \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_-|}\right)$$

とする（核の間の反発力は別にしておく）．このとき，電子が引きおこす 2 つの原子核の間の力は古典的には $-\partial V/\partial\lambda$ を電子の運動に関して平均することによって計算する．量子力学に移せば，$u(\boldsymbol{r};\, \lambda)$ で $H_\lambda u = E(\lambda)u$ をみたすものをとって

$$f_z(\lambda) = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial \lambda} \right\rangle_{\rm av} = \int u^* \left(-\frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) u\, d\boldsymbol{r}$$

とするところである．

しかし，分子の量子力学では $f_z = dE(\lambda)/d\lambda$ として力 f を計算するのが常であった．$E(\lambda)$ の微係数を計算するには，H_λ の固有値問題を少なくとも 2 つの λ に対して解かねばならないから手間がかかる．Feynman は，これら 2 つの計算法が同じ f_z を与えること，すなわち

$$\int u^* \frac{\partial H_\lambda}{\partial \lambda} u\, d\boldsymbol{r} = \frac{d}{d\lambda} \int u^* H_\lambda u\, d\boldsymbol{r} \qquad (2.2)$$

となることを証明したのだ．

この問題では，電子の存在確率密度が 2 つの原子核の間で高い状態ほど，電子の引きおこす核の間の引力は強くなるが，それが何故なのかに対する直観的な理解も得られる．つまりは，間にある電子雲が核を引き寄せるのだからである．こうして H_2 分子の場合，2 つの電子の合成スピンが 0 の状態で化学結合がおこり，1 の状態ではおこらないという量子化学の神秘も吹きはらわれた．

この話は，この例よりもっと一般的である．

3. 発散のない電磁力学

Feynman は MIT の学部学生のとき Dirac の『量子力学』や Heitler の『輻射の量子論』を見て量子電磁力学が発散の困難をかかえていることを知る．電子が電磁場との相互作用の現れとしていろいろの波数ベクトルの光子を吸ったり吐いたりする結果，電子の質量が波数ベクトルに関する積分だけ増え，その積分が発散するという困難である．

この問題にとりつかれて，彼がどのように考えを進め「くりこみ」理論に到達したかは，その業績に対して与えられたノーベル賞の受賞講演に詳しく語られているので[4)]，ここには粗筋だけを記す．

3.1 ラグランジュ的な見方

Feynman は，電子の質量が発散積分になるのは電磁場があるからだと思った．普通，電子が他の電子に力を及ぼすのは，電子 A がまわりに電磁場をつくり，その場から電子 B が力を受けると考える．そうすると，その場は，それをつくった当の電子にも作用し，それが質量の発散積分になるのだ．それなら，いっそ場などなければよい，電子 A は，場など介さずに，直接に電子 B に力をおよぼすとすればよいと Feynman は考えた．

しかし，それではたちまち困る．電子は加速されると輻射をだし，それだけエネルギーを失うはずだが，他の電子に力を及ぼすだけではエネルギー損失がおこらない．いや，電子 A が加速され，その分だけ電子 B におよぼす力が変わると，その電子 B が A に及ぼす力も変わり，それが A のエネルギー損失を招くのではないか？

しかし，電子 A の作用が B に及ぶには相互の距離 r できまる時間 $\Delta t = r/c$ がかかり（c は光の速さ），それによる B の運動の変化が A に返ってくるにはまた時間 Δt がかかる．これでは困る．A のエネルギー損失は，A が加速されたとき同時におこらなければならないのだ．

それならば，と Feynman は考えた．電子 A が加速された効果は加速の時刻 t より Δt だけ前にも B に届くとしたらどうか，A が加速された時刻 t の効果は B に $t - \Delta t$ に届き，それを B が返す効果は Δt だけ遅れて A にちょうど時刻 t に届く．

こうして A に返ってくる作用は B が遠くにいればそれだけ弱くなる．それでは困るので，Feynman は B がたくさんあると考えた．詳しくは文献 4) を見ていただくことにするが，彼は A の時刻 t の作用は B に $t - r/c$ と $t + r/c$ とに同じ強さで届くとすれば，すべてがうまく行くことを見出した．

こうすると，時刻 t の系の運動の変化は時刻 t の系の状態だけではきまらないことになるので，系の運動を微分方程式で決定することはできなくなる．力学で使うハミルトン形式もダメである．しかし，ラグランジュの変分原理は相変わらず成り立つことが見いだされた．運動を微分方程式のように時々刻々にきめてゆくのではなく，始めの時刻から終わりの時刻にわたるある量—ラグランジアン—の積分が極値をとるという条件で，その間の運動をきめるのである．

3.2 量子力学へ

古典力学から量子力学に移らなければならないが，当時の量子力学はハミルトン形式の古典力学を前提していた．ラグランジュの変分原理でも，ラグランジアンによってはハミルトン形式に帰着できることは周知のとおりであるが，Feynman のラグランジアンではそれができなかった．

ラグランジュの変分原理で支配される力学系の量子力学をつくるにはどうすべきか？ Feynman は Dirac が次のように書いていることを教えられる．すなわち，量子力学において時刻 t の状態関数 $\psi(x,\,t)$ から時刻 $t+\varDelta t$ のものへの写像を

$$\psi(x,\,t+\varDelta t)=\int K(x,t+\varDelta t|x',\,t)\psi(x',\,t)\,dx' \tag{3.1}$$

の形に与える“伝播関数” $K(x,\,t+\varDelta t|x',\,t)$ が古典力学のラグランジアン $L(\dot{x},\,x)$ からつくった

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}L\left(\frac{x-x'}{\varDelta t},\,x\right)\varDelta t\right] \tag{3.2}$$

に似ている[5]．

「似ている」とは何だ，と思った Feynman は (3.2) を (3.1) の K に代入してみた．簡単なラグランジアン $L=(m/2)\dot{x}^2-V(x)$ の場合

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varDelta t}(x-x')^2\right]$$
$$\times\left(1-\frac{i}{\hbar}V(x)\varDelta t\right)\psi(x',\,t)dx'$$

において，$x'-x=\xi$ とおくと，$\psi(x')=\psi(x+\xi)$ をテイラー展開して

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varDelta t}\xi^2\right]$$
$$\times\left\{\psi(x,t)+\psi'(x,t)\xi+\frac{1}{2}\psi''(x,t)\xi^2+\cdots\right\}d\xi$$

は，$\alpha>0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha\xi^2}d\xi=e^{i\pi/2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi e^{i\alpha\xi^2}d\xi=0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2e^{i\alpha\xi^2}d\xi=\frac{i}{2}e^{i\pi/2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

となることを用いて

$$e^{i\pi/2}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\varDelta t}{m}}\left\{\psi(x,t)+i\frac{\hbar\varDelta t}{2m}\psi''(x,t)\right\}$$

となる．また

$$V(x)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varDelta t}\xi^2\right]\psi(x',t)d\xi$$
$$=e^{i\pi/2}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\varDelta t}{m}}V(x)\psi(x,t)$$

となるから，K を (3.2) にとる代わりに

$$K(x,\,t+\varDelta t|x',\,t)=(3.2)\times e^{-i\pi/2}\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varDelta t}} \tag{3.3}$$

にとれば，$\varDelta t\to 0$ の極限で

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right\}\psi(x,t)$$

の成り立つことが分かる．これはシュレーディンガー方程式に他ならない．(3.3) は正しいのだ．

3.3 径路積分

(3.3) は正しいので，有限の時間離れた状態は

$$\psi(x,t)$$
$$=\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dx_{N-1}K(x,t|x_{N-1},t_{N-1})\cdots$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}dx_0K(x_1,t_1|x_0,t_0)\psi(x_0.t_0)$$

としてつくられる．ここに

$$t_k=t_0+k\varDelta t,\quad \varDelta t=\frac{t-t_0}{N}.$$

右辺の各 K は (3.3) だから，伝播関数でいえば

$$K(x,t|x_0,t_0)$$
$$=\lim_{N\to\infty}\left(e^{-i\pi/2}\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varDelta t}}\right)^N\int_{-\infty}^{\infty}dx_{N-1}$$
$$\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dx_1$$
$$\times\exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N}L\left(\frac{x_k-x_{k-1}}{\varDelta t},x_k\right)\varDelta t\right] \tag{3.4}$$

となる．x_k を時刻 t_k における粒子の位置と見れ

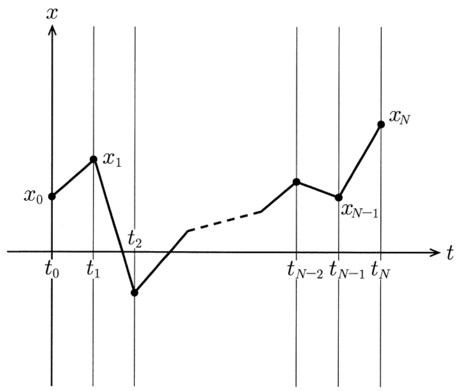


図1 経路．$x_1, \cdots, x_{N-1}$ についての積分は，あらゆる径路にわたる積分と見ることもできる．

ば，被積分関数の $x_0, \cdots, x_N = x$ は時刻 t_0 に x_0 を発し時刻 t_k に x_k を通って時刻 t_N に x に着く一つの運動 $x = x(t)$ を表わす（図1）．そして積分は，$x_0, \cdots, x_{N-1}$ をいろいろに動かして，すなわちいろいろな運動 $x = x(t)$ にわたって総和するのだと見ることができる．普通，この運動 $x = x(t)$ を径路とよび，あらゆる径路にわたる積分を径路積分という．シンボリックに書けば

$$K(x, t|x_0, t_0)) \\ = \mathcal{N} \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} L(\dot{x}, x)dt\right] \mathcal{D}x(t) \quad (3.5)$$

となる．量子力学的状態の時間発展のこの積分表示がFeynmanの学位論文となった[6]．

4. 下から見たロスアラモス

戦争中，Feynman は R. Wilson に誘われてロスアラモスで原子爆弾の開発研究に携わった．そのときの様子は彼自身が「下から見たロスアラモス」で語っている[7]．「下から」というのは，博士論文をようやく書き上げたばかりの25歳の身分で学界の大物に交じって働くことになったからだ．彼の能力はすぐに認められた．

1945年7月16日，ニューメキシコのアラモゴルドで最初のプルトニウム爆弾の実験が行われたとき，Feynmanだけは指示に従わず黒眼鏡をかけていなかった．彼は間違っていた．途方もない閃光が彼の眼をくらませ苦痛が顔をそむけさせた．皆は喜んだが，R. Wilson だけはむっつりしたままだった．「何てことを，われわれはしでかしたのだ」とつぶやく彼に Feynman は言った．「君だぞ．君がぼくを引き込んだのだ．」[8]

5. Bohr 先生が怒った

N. Bohr は量子力学への扉を押し開いた人だ．誰でも知っている．その Bohr が怒ったのだ．「電子の軌道を考えるなんて無茶な！」怒られたのは Feynmann．1948年3月20日から4月1日まで，物理学者たちがペンシルヴァニア州のポコノ山の山荘に集まったときのことである．話は遡る．

5.1 シェルター島の会議

この会議は1947年6月に開かれた．第二次世界大戦は1945年8月に終わり，学問に戻れることになった．さて，何から手をつけようか？ それを見定めるために物理学の大家と新進，合わせて23人が集まった．

そこで34歳の W. Lamb が目覚ましい実験を報告した．水素原子のエネルギー準位が Dirac 理論の予言からわずかにずれている！ 議論は沸騰したが，解決の糸口は見つからなかった．会議から帰る列車の中で H.A. Bethe は問題を解いた．答えは Lamb の実験値に一致した！ 興奮した Bethe は駅に着くなり Feynman に電話した．Feynman は Bethe の助手となってコーネル大学に着任したばかりである．「計算は非相対論的だが実験によく合う．相対論的に計算してみたい．」「ぼくがやりましょう」と Feynman．彼には永年考え続け発展させてきた独自の方法があった．経路積分である．それを実験につきあわせるチャンスだ．

5.2 ポコノ山荘の会議

計算をまとめ勇躍のりこんだ Feynman は異星人のように扱われた．Lamb の実験は，J. Schwinger が普通の量子力学で説明できるという報告をした．面倒な計算に次ぐ計算だった．その後，Feynman は数式の代わりに絵を描いた．それで Schwinger と同じ結果を導いたのだが，電子の経路が，などというものだから理解する人はなく，Bohr からは

叱られた．R. Oppenheimer から酷評されたのが特に痛かった．Feynman は落ち込んだ．

6. Feynman ダイヤグラム

Feynman が描いた絵というのは，図 1 に加えて次のようなものである．いま，2 つの電子 a, b の運動を考える．電子 a の時刻 t_1 の，電子 b の時刻 t_2 の状態を時刻 t_3，t_4 の状態に移すには

$$\begin{aligned}&\psi(\boldsymbol{r}_3, t_3, \boldsymbol{r}_4, t_4)\\ &= \int d\tau_1 \int d\tau_2 K(\boldsymbol{r}_3, t_3, \boldsymbol{r}_4, t_4 | \boldsymbol{r}_1, t_1, \boldsymbol{r}_2, t_2)\\ &\quad \times \psi(\boldsymbol{r}_1, t_1, \boldsymbol{r}_2, t_2) \qquad (6.1)\end{aligned}$$

とする．ここに関数 K は系のラグランジアン L から第 3 節のようにしてつくるのであるが，いまは別の道をとる．

2 つの電子の相互作用が弱ければ，第 0 近似では相互作用はないとして K は

$$\begin{aligned}&K^{(0)}(\boldsymbol{r}_3, t_3, \boldsymbol{r}_4, t_4 | \boldsymbol{r}_1, t_1, \boldsymbol{r}_2, t_2)\\ &= K_0(\boldsymbol{r}_3, t_3 | \boldsymbol{r}_1, t_1) K_0(\boldsymbol{r}_4, t_4 | \boldsymbol{r}_2, t_2) \qquad (6.2)\end{aligned}$$

となる．$K_0(\boldsymbol{r}_3, t_3|\boldsymbol{r}_1, t_1)$ は (3.4) の K で $V = 0$ としたもの．これは図 1 のような経路積分でつくるのだが，図 2 のように書き表わしておこう．

電子が時間遅れのあるクーロン相互作用をするとしよう．それは，(6.2) に加わる第 1 近似としては，光子の伝播関数を波線で表して図 3 で与えられると Feynman はいう．この (a) を式で書けば

$$\begin{aligned}&K^{(1)}(\boldsymbol{r}_5, t_5, \boldsymbol{r}_6, t_6 | \boldsymbol{r}_1, t_1, \boldsymbol{r}_2, t_2)\\ &= \int d\tau_3 \int d\tau_4 K(\boldsymbol{r}_5, t_5 | \boldsymbol{r}_3, t_3) K(\boldsymbol{r}_6, t_6 | \boldsymbol{r}_4, t_4)\\ &\times D(\boldsymbol{r}_3, t_3 | \boldsymbol{r}_4, t_4) K(\boldsymbol{r}_3, t_3 | \boldsymbol{r}_1, t_1) K(\boldsymbol{r}_4, t_4 | \boldsymbol{r}_2, t_2). \qquad (6.3)\end{aligned}$$

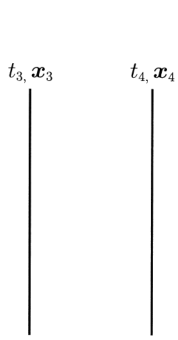


図 2　自由 2 粒子系の伝播関数．

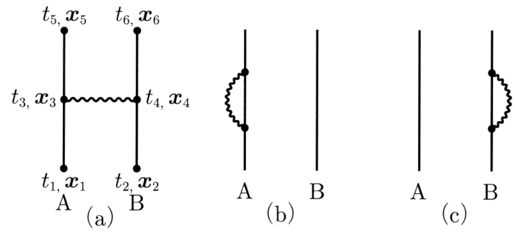


図 3　時間遅れのあるクーロン相互作用をする 2 粒子系の伝播関数，第 1 近似の補正．

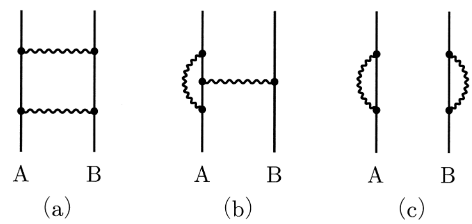


図 4　時間遅れのあるクーロン相互作用をする 2 粒子系の伝播関数，第 2 近似の補正．ダイヤグラムはもっといろいろある．

ここに $d\tau = d\boldsymbol{r}dt$, D は $r = |\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_3|$ として

$$\begin{aligned}D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}\left\{\delta\left(t_4 - t_3 - \frac{r}{c}\right)\right.\\ \left. + \delta\left(t_4 - t_3 + \frac{r}{c}\right)\right\} \qquad (6.4)\end{aligned}$$

である．$\{\cdots\}$ 内の第 1 項は光子が電子 A をでて電子 B に向かうことを，第 2 項はその逆を表わす．この D は

$$D = \frac{ce^2}{2\pi\varepsilon_0}\delta\left((t_4 - t_3)^2 - \left(\frac{r}{c}\right)^2\right)$$

と書くことができる．本当は $\delta(x)$ の代わりに $\delta_+(x)$ をおくべきであるが，そのことの説明は省略する．

第 1 近似の補正には図 3 (b), (c) に示すものもある．(b) は電子 A が出した光子を自分で吸っているもので A の自己エネルギーへの寄与を与える．(c) は B の自己エネルギーである．第 2 近似の補正には図 4 に示すようなものがある．図 2,

3，4 のような図形は Feynman ダイヤグラムとよばれる．Feynman がポコノ山荘の会議で描いたのもこのような図形である．(6.3) でしたように電子の線には K_0 を光子の線には D を対応させれば容易に補正項の式を書くことができる．

ここまでは電子の自由伝播関数 K_0 はラグランジアン $L=(m/2)\dot{x}^2$ からつくるものとしてきた．相対論的な理論に移り電子に対して Dirac 方程式に応ずるラグランジアンを用いれば，陰陽電子の生成，消滅の可能性が生じ，Feynman ダイヤグラムは一層にぎやかになるが[9]，それに立ち入ることはやめておこう．

7. 液体ヘリウムの超流動

Feynman は早くから液体ヘリウムの超流動に関心をもってきた．戦後の日本で 1953 年に開かれた理論物理学国際会議にもってきたのも液体ヘリウムについての論文だった．

7.1 超流動の条件

管の中をヘリウムが速度 $\boldsymbol{v}$ で流れている．管壁との相互作用で流れは遅くなるであろう．するとヘリウムの運動量は減少する．それはヘリウムの中に流れと逆向きの運動量をもつ素励起が生ずるためである．ヘリウムの静止系で，その運動量とエネルギーを $\boldsymbol{p}$, $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ とする．

管の静止系で見ると，ヘリウムの運動量とエネルギーは，全質量を M として

$$\boldsymbol{P}=M\boldsymbol{v}+\boldsymbol{p},\quad E=\frac{1}{2}M\boldsymbol{v}^2+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}+\varepsilon(\boldsymbol{p})$$

となる．励起がなかったら $E_0=\frac{1}{2}M\boldsymbol{v}^2$ であって，励起が生ずるのはエネルギーが減少するはずであるから

$$\varepsilon(\boldsymbol{p})+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}\le 0 \tag{7.1}$$

でなければならない．もし，どんな素励起もこの条件をみたさないなら，ヘリウムの中に励起は起こりえず，したがって管壁がヘリウムの流れを遅くすることもできない．(7.1) が超流動の条件である．L.D. Landau によって 1941 年に提出された．

7.2 低い励起状態

液体ヘリウムのハミルトニアンは

$$H=-\sum_{k=1}^{N}\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_k+\sum_{k>l}V(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_l) \tag{7.2}$$

という形をしている．V はハード・コアをもつポテンシャルである．その基底状態を Φ としよう．

$$H\Phi=0. \tag{7.3}$$

Feynman[10] は，^{4}He が Bose 統計にしたがうことより議論を重ね，その低い励起状態の波動関数は $\Psi=\sum_{k=1}^{N}f(\boldsymbol{r}_k)\Phi$ という形をしているといい，この $f(\boldsymbol{r})$ を変分法できめる．$H\Psi$ は

$$\sum_n\left[-\sum_k\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\Phi\nabla_k^2 f(\boldsymbol{r}_n)+f(\boldsymbol{r}_n)\nabla_k^2\Phi\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,2\nabla_k f(\boldsymbol{r}_n)\cdot\nabla_k\Phi\right\}+\sum_{k>l}V(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_l)f(\boldsymbol{r}_n)\Phi\right]$$

であるが，(7.3) も考慮して，これは

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_k\left\{\Phi\nabla_k^2 f(\boldsymbol{r}_k)+2\nabla_k f(\boldsymbol{r}_k)\nabla_k\Phi\right\}$$

となる．さらに

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Phi^{-1}\left\{\Phi^2\nabla_k^2 f(\boldsymbol{r}_k)+\nabla_k f(\boldsymbol{r}_k)\cdot\nabla\Phi^2\right\}$$
$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\Phi^{-1}\nabla_k\left\{\Phi^2\nabla_k f(\boldsymbol{r}_k)\right\}$$

と変形できるから，H の期待値は

$$\langle\Psi,H\Psi\rangle$$
$$=\frac{\hbar^2}{2m}\int\Phi^2\sum_k\nabla_k f(\boldsymbol{r}_k)\cdot\nabla_k f(\boldsymbol{r}_k)d\boldsymbol{r}_1\cdots d\boldsymbol{r}_N$$

となる．Φ は $\boldsymbol{r}_1,\cdots\boldsymbol{r}_N$ の置換に関し不変なので

$$\langle\Psi,H\Psi\rangle=\frac{\hbar^2}{2m}\rho_1\int\nabla f(\boldsymbol{r})\cdot\nabla f(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} \tag{7.4}$$

となる．ここに

$$\rho_n(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n)=\sum_k\cdots\sum_l\int\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}'_k)\cdots$$
$$\times\,\delta(\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{r}'_l)\Phi^2 d\boldsymbol{r}'_1\cdots d\boldsymbol{r}'_N$$

である．特に ρ_1 は定数，$\rho_2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$ は差 $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$

の関数である．

$$\langle\Psi,\Psi\rangle=\int f(\boldsymbol{r}_1)f(\boldsymbol{r}_2)\rho_2(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)d\boldsymbol{r}_1d\boldsymbol{r}_2=1$$

の条件のもとで (7.4) を最小にする f は，ε をラグランジュの未定乗数として

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta f(\boldsymbol{r})=\varepsilon\int P(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \quad (7.5)$$

をみたす．ただし $P=\rho_2/\rho_1$ とおいた．これは容易に解けて

$$f(\boldsymbol{r})=\exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}]. \quad (7.6)$$

このとき (7.5) の右辺は，2 体の相関関数 P のフーリエ変換

$$S(\boldsymbol{k})=\int P(\boldsymbol{r})\exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}]d\boldsymbol{r}$$

となる．これを用いてエネルギー固有値は

$$\varepsilon=\frac{\hbar^2\boldsymbol{k}^2}{2m}\frac{1}{S(\boldsymbol{k})}. \quad (7.7)$$

中性子線回折の実験から得られた $S(\boldsymbol{k})$ を図 5 に示す．これによると，小さい k に対して

$$S(\boldsymbol{k})=(0.24\times10^{-10}\,\mathrm{m})k \quad (k<10^{10}\,\mathrm{m}^{-1})$$

であるから，$\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}$ に注意して

$$\varepsilon(\boldsymbol{p})=\frac{\hbar^2k^2}{2m}\frac{1}{S(k)}=\frac{\hbar^2k}{2m}\frac{1}{0.24\times10^{-10}\,\mathrm{m}} \quad (7.8)$$

となる．これは k に比例しておりフォノンのスペ

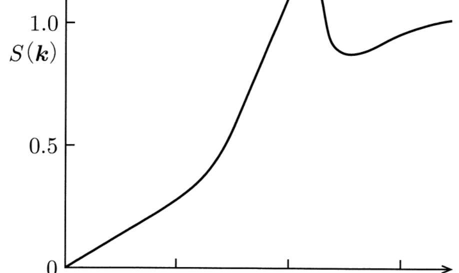


図 5　中性子線回折の実験から得られた $S(\boldsymbol{k})$．文献 10) より．

クトルである．超流動の判定条件 (7.1) は

$$\frac{\varepsilon(\boldsymbol{p})}{p}=\frac{(\hbar^2/2m)k}{0.24\times10^{-10}\,\mathrm{m}}\frac{1}{\hbar k}=340\,\mathrm{m/s} \quad (7.9)$$

となり，これより遅い流れは超流動となる．

8. 環境との相互作用

Feynman と F.L. Vernon は 1963 年に注目する系が環境との相互作用によって受ける影響を調べた．注目する系の座標を Q, 環境の座標を X とし，それぞれのラグランジアンを $L(\dot{Q},Q)$, $L(\dot{X},X)$, それらの間の相互作用を $L_I(Q,X)$ とする．

注目する系が時刻 τ に状態 $\psi_m(Q_\tau)$ にあり，時刻 T には $\psi_n(Q_T)$ に遷移している確率は径路積分で書くことができる．ここで環境の経路について積分してしまうと，注目する系の経路に関する積分の形が変わる．それが環境の影響である．式を書くことは省略しよう．

Feynman と Vernon は，環境が無限個の系からなるとき注目する系のエネルギーが環境に吸い取られることを示した．

9. チャレンジャー号の事故調査

ここに書くべき Feynman の仕事には，ほかにも素粒子の弱い相互作用に関するものや強い相互作用ではパートン模型がある．よく知られていることでもあり，紙数がなくなったので割愛したい．

しかし，スペース・シャトル「チャレンジャー号」の事故調査における Feynman の活躍には触れておきたい．この事故は 1986 年 1 月 28 日におきた．発射直後のチャレンジャー号が爆発し，宇宙飛行士 6 人と小学校教師 1 人が亡くなった．

Feynman は事故調査委員会（W.P. Rogers 国務長官を委員長に政治家，宇宙飛行士，軍人そして Feynman からなる）に参加して独自の報告をまとめた[11]．それは NASA の面子に関わるのを恐れた委員会に握りつぶされそうになったが，Feynman のがんばりで委員会報告の付録[12]として辛うじて公表されることになった．

チャレンジャー号に使われたパッキング（ガスケット）のゴムが氷水につけると弾性を失うとい

う実験をしてFeynmanは問題点を明らかにしたのだった．事故の日，NASAの幹部たちは，シャトル計画を予定通り進めるため，打ち上げには気温が低すぎるという技術者たちの警告に耳をかさなかったのだ．

10. ファインマン物理学

Feynmanを語って彼の講義録『ファインマン物理学』[13] を逸することはできない．これは，彼がカリフォルニア工科大学の1–2年生に（つまり2年間にわたって）行った講義を編集した，翻訳では5巻ものである．『力学』からはじまって『光・熱・波動』，『電磁気学』，『電磁波と物性』，『量子力学』にいたる．

なによりも，話題が豊富である．彼は語りの名手であるが，その話術で数式はあまり用いないで物理を展開する．普通の体系にはとらわれない．たとえば『力学』では「踊るアトム」からはじめて「エネルギーの保存」に進み「時間と距離」にきたかと思うと「確率」にとぶ．やがて「特殊相対性理論」がはじまったと思うと「回転」の話があってから「調和振動子」がくるといったぐあい．

『光』のところではフェルマの原理の反例はともかく，その成立条件は，いわれてみれば尤もであるが，教えられた．

『電磁気学』では空中電気や雷の話が日本のわれわれには目新しい．リエナール・ウィーヘルト・ポテンシャルの導き方も興味深く，電磁場のエネルギーの不定さはこれまで考えたことがなかった．しかし，Feynmanにも注意の行き届かないところがあって，磁場に置かれた電流の流れている導線にはたらく力を，導線の中を動く電荷にはたらくローレンツ力として導きながら導線の透磁率によって中の磁束密度が異なることに注意していない（参照：文献14)）．$\Delta\boldsymbol{A}$ の動径成分を ΔA_r としてはいけないという親切な注意もある．

『量子力学』もユニークである．角運動量の章は電気双極子放射にはじまり，ポジトロニウムの消滅の後に回転の行列 $R_y(\theta)$, $R_z(\phi)$ がでて，次の水素原子の章で $Y_{lm}(\theta,\phi) = a^{-1}\langle l,0|R_y(\theta)R_z(\phi)|l,m\rangle$ がようやく定義される．Feynmanが不可能だから試みてはいけないと言った巨視的スリットによる電子線回折の実験が外村彰らによって実行されたことを付言しておこう．

参考文献

1) R.P. Feynman,「ものごとをつきとめることの喜び」,『困ります，ファインマンさん』，大貫昌子訳，岩波現代文庫 (2001), p.68.
2) R.P. Feynman,「考えるだけでラジオを直す少年」,『ご冗談でしょう，ファインマンさん』(上)，大貫昌子訳，岩波現代文庫 (2000). p.2.
3) R.P. Feynman, Forces in Molecules, *Phys. Rev.* **56** (1039) 340.
4) R.P. Feynman『物理法則はいかにして発見されたか』，江沢 洋訳，岩波現代文庫 (2001). 第二部，時空全局的な観点の発展.
5) P.A.M. Dirac『量子力学』第4版，朝永振一郎ほか訳，岩波書店 (1968), p.171.
6) L.M. Brown ed., *Feynman's Thesis*, World Scientific (2005).
7) 「下から見たロスアラモス」，文献 2), p.175.
8) S. Groueff『マンハッタン計画』，中村誠太郎訳，早川書房 (1967), p.393, および文献 7), pp.232–233.
9) R.P. Feynman, Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics, *Phys. Rev.* **76** (1949) 769.
10) R.P. Feynman, Atomic Theory of the Two-Fluid Model of Liquid Helium, *Phys. Rev.* **91** (1954) 262.
11) R.P. Feynman,「ファインマン氏，ワシントンに行く—チャレンジャー号事故調査のいきさつ」，文献 1), p.139.
12) R.P. Feynman「スペース・シャトル『チャレンジャー号』事故少数派調査報告」,『ファインマンさん ベスト エッセイ』, 大貫昌子, 江沢 洋訳, 岩波書店 (2001).p.159.
13) R.P. Feynman『ファインマン物理学』全5巻，岩波書店.
14) 今井 功『新感覚物理入門』岩波書店 (2003), p.175.

（えざわ・ひろし，学習院大学名誉教授）

リレー連載

数学的な感覚の探求 第2回

思考法の源を探る

私の数学感覚

浦川　肇

1. 千年単位で考える

2011年3月11日午後2時46分に起こった東日本大震災以後,「物事を千年単位で考える」ことが重要である，と思うようになった．日経サイエンス2011年6月号「特集：東日本大震災」の記事「国史が語る千年前の大地動乱」によれば，今回の大震災は，1150年前の貞観11年（869年）の陸奥国で起きた貞観（じょうがん）大地震と大津波以来のことなのだそうである．それは「日本三代実録」に書かれていて，当時千人の人々がなくなった．その貞観大震災の前後の30年間は天変地異の連続である．中越大地震，兵庫摂津大地震の後に，貞観地震が起きている．それと相前後して，火山の噴火が起き，10年後に関東大震災，続いて南海大地震と続いた．

500年前の明応7年（1498年）8月25日午前8時，遠州灘を震源とする大地震が起こり，直後に10メートルを超える大津波が押し寄せ，伊豆から伊勢に至る東海地方沿岸で2万6千人が亡くなった．津波で砂州が流出し浜名湖が遠州灘とつながり，そのときできた3キロメートルの水路は「今切（いまぎれ)」と呼ばれている．

日本列島の地質構造が誰の目にもはっきりしてきた．糸魚川静岡構造線を蝶番にして東日本と西日本に分かれ，東日本の海底が一気に動いた．その地殻変動は関東と西日本の地殻構造に影響を及ぼすことは必然である．東海地方の，海から7キロメートルの沿岸地帯では,「津波災害」が心配である．

今回は内陸の耐震補強が済んだ所は無傷だったが，補強がまだだった所は大きな被害を受けた．公共事業をしっかりと行い，地震などの天災に強い国土の建設を強く望みたい．また，福島第一原子力発電所の事故により，現代の科学技術に大きな疑問符が投げられた．現代科学技術の歴史はまだ300年程度である．やはり千年以上の時間の試練を経ることが重要なのではと思ったりする．

その点，数学はどうだろうか．「計算（calculus)」はメソポタミアの時代，小石（ラテン語で，calx（石）＋ ulus（小さい)，腎臓などの結石も同じ）を用いて数を表示し，少し大きめの石も用いて位取りも行っていた．幾何学はピタゴラス以来2000年以上経ち，非ユークリッド幾何誕生に千年の苦闘があった，算術はアルコワリズミー以来1300年経っている．論理学は古代ギリシャのアリストテレスに遡る．ニュートン，ライプニッツらの「微積分学」はまだ350年というところであろうか．しかし数学という学問は，長い年月の試練に遭い，しっかり耐えていると言えよう．

2. 私の数学感覚の源

震災後の日々の間，食料の買い出しと水汲みで，ギックリ腰になり，ただひたすらノートに自分が現在興味を抱いている数学の問題「2-調和写像の幾何の展開」に関して，計算していたのであった．東北大学では，各学部，大変な被害が出た．建物が外目には無事なようでも，基礎や内部がめちゃめちゃになっていて，研究資料がやられた研究者がほとんどである．しかしながら，数学者の場合，ノートと研究論文，本やネットが「無事」であれば，何とかやれるのである．幸いなことに，2010年 3 月東北大学を定年退職し，4 月から国際教育院に再就職していたので，自分の本と論文コピーを全部我が家に持ち帰っていて，何とか一応は自前でやれるのであった．ただし，気持ちが不安定な中でやっているので，やっている内容は上等なもの，というわけには行かない．とにかく，ここが私の「数学感覚」の出発点なのである．

実は，この「何もない所から出発する」という私の「数学感覚」は，1983 年にドイツのマックス・プランク数学研究所にいた頃，参考書が手元に何もないという状態で数学を始めるときに鍛えられていたのであった．大阪大学大学院の頃，大学紛争の最中，先生方から

「何もない所で自分で考えてやれるようにしなさい．数学では，それが一番大事なことなのだ」

と教えられていたことを，自分なりに反芻したまでのことで，今回もまたそうなのである．「何もないここが私の出発点」という思いを改めて噛み締めたのであった．

3. 大学新入生に伝えること

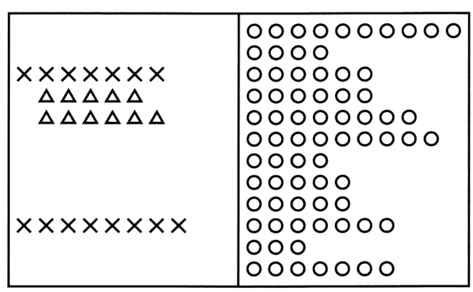
大学新入生を迎えて第一回目の授業は一番大事であり，私はこれを最も大切にしている．そこで話すのは，次の四点である．

(1) 勉強の仕方の基本を身につける．
(2) 研究資料の整理の基本を身につける．
(3) いかに研究のテーマを見つけるか．
(4) ネットの活用．

順に述べよう．まず
(1) **勉強の仕方**．勉強の仕方は人様々であるけれども，そこには「一定の法則」があるように思える．要は講義に出席しノートをしっかり取ることである．講義をサボるのは，結局，高い授業料を無駄に捨てていることと同じである．
(a) 第 2 節とは正反対のことを言うようであるが，

先ず，黒板の板書，パワーポイントなどのスライドを「何も考えない」で写す，

ことを勧めている．大学と高校までの講義と変わることは何もないが，違う所は「その場ですぐに理解できないことが多い」ということにある．後でゆっくり自分なりに考えねばならないことが多い．その際，ノートも何もなければ，教科書以外に考えるべき材料を何も持っていないこととなる．さてそのノートの取り方であるが，私は下図のように，ノートの右頁にのみ写し（○印），左頁を空けておくように指導している（ルーズリーフのときは，表のみを使用）．


左　頁　　右　頁

(b) 宿題をすること．私は毎回宿題を出しており，講義中に 20 分ほどかけて宿題チェックしている．宿題をやろうとすると，講義中，自分が何も理解していないことに気付く．教科書を見ても分からないことが出て来る．そこで，自分の分からないことを正直に，ノートの左頁に，分からない点を「ここが分からない」と書くこと（×印）．
(c) 人に聞くこと．分からない点を友達や先生に聞くこと．教えてもらったらその内容をノートの

左頁に書く（△印）．その際，教えてもらった日付け，氏名のデータも忘れずに書いておく．ノートの作成についてはここまでである．

(2) **研究資料の整理の仕方**．大学院に行くようになるまでに，2段ほどの「ファイリング・キャビネット」を大枚をはたいて持つことを勧める．それに，「線形代数学」などとラベルに記入のファイルに先ほどのノートを入れる．

以上の作業を，各セメスターの15週，すべての教科について繰り返す．こうして何年かが過ぎ，無事進級し，研究室に配属となる．

(3) **研究のテーマの見つけ方と選び方**．私はこれについては，二十代，助手になったばかりの頃，大阪大学の尾関英樹先生より，フランスから大阪大学に来ておられたフランスのマルセル＝ベルジェ先生からお聞きしたという次のようなお話に感銘を受け，それを自分自身の指針として今までずっと守っている．それは

「誰でも知っている有名な大きなテーマと誰も知らない小さなテーマと2つあったときは，躊躇することなく大きなテーマを選びなさい」

というものである．小さなテーマであるからといって，侮ってはならない．思いがけない障害が現れ，簡単にできると思っていたところそうではなく，足をすくわれてしまうことが多い．逆に，有名な大きなテーマは誰もが敬遠し，だれもやっていないことが多い．難しければ，部分的解決を目指せば良い．そこで，教授にそそのかされた何も知らない若い大学院生か助手の人たちがやってしまう．今までの歴史がそれを如実に物語っている，と言われるのである．小さな問題をやると，他人にそれを説明することすら大変である．有名な問題の場合，説明の手間は省け，海外から著名教授が来られた際にも，「どんなテーマをやっていますか」と聞かれたとき，すぐに話題がかみ合って，「実は私もそれに取り組みここまでやった．君はどうかね」，「ここまでやりました」，「ほほう，それは面白い．ちょっと詳しく話してくれないかね」などと，ディスカッションもはずむ．うまくすると，「ちょっと私の所に来ないかね」という話に展開することもある，というものであった．私自身はこの話を聞いてそれを真に受け，ベルジェ先生の提出された問題を本格的に手掛けることにしたのであった．何年か後，その問題の解決に至ったとき，ベルジェ先生に推薦状を書いて頂いて，ドイツのボンにあるマックス・プランク数学研究所に客員教授として2年間滞在する幸運を引き当てる幸いを得たのであった．

さて，研究者の卵として独り立ちする頃，いろいろな話を聞いて，テーマや結果が錯綜する．そのとき，上の (1), (2) のように研究資料とノートが整理してあるのと，そうでないのとの違いがここに出てくるのである．「この手の話はどこかで聞いたことがあるな．そう言えば1年の線形代数に出て来たな」となる．教科書も捨て，ノートも整理してなければ，それ以上の進展はほとんど絶望的である．

他方，上のように整理してあれば，「線形代数学」のラベルのファイルをすっと探せ，ノートや教科書を見ることができる．ノートを見ると，何と汚い字で書かれている．実はそれらは全部自分が書いた字なのだ．何月何日，誰それさんから教わったと書いてある．なつかしい．その時の情景が一瞬のうちに蘇ってくる．すぐに，「今やっている問題は線形代数のこの問題に関連している」と分かってくる．こうして「今の問題の新たな展開」も可能になるのである．

(4) **ネットの活用**．現代は誰でもやっている．今回の地震災害でも多いに助けられた．

一つ助言すると，まずは

「http://www.wolframalpha.com」

にアクセスしなさい．数学公式，疑問点や知りたいこと，図や詳細な活用法など英語で教えてもらえます，と紹介し，喜んで使ってもらっている．

4. 小さな工夫を積み重ね，数学を鑑賞する

さて，数学の研究者は，誰でも「自分なりの工夫」をいろいろとしておられる．どんなに些細な

ことでも「自分なりに工夫してやって見ること，数学を鑑賞する」ことは，とても重要だと思う．私の場合は，「1変数関数の微分の定義」と「2変数関数の全微分の定義」の講義の際に，少し工夫をしている．意外に学生さんから「分かりやすい」と好評なので今度は，それについてお話ししよう．

（第1段）1変数関数 $y=f(x)$ が $x=a$ において**微分可能**であるとは，極限値

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=A \tag{1}$$

が存在するというものであった．ここで $h=x-a$ とおくと，(1) 式は

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A \tag{2}$$

と等価である．さらに (2) は，

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A+\epsilon(h) \tag{3}$$

と $\epsilon(h)$ を定義するとき，

$$\lim_{h\to 0}\epsilon(h)=0 \tag{4}$$

と等価である．ここで，このことを次のように工夫してみる．(3) 式の両辺を h で払い，次のように表示する：

$$f(a+h)=f(a)+Ah+h\,\epsilon(h)$$

（定数項 + 1次の項 + 高次の項）. (5)

ここで $h\,\epsilon(h)$ が h について**高次の項**であるとは，$\lim_{h\to 0}\epsilon(h)=0$ のことをいう．

(5) 式のように表示されることが $x=a$ で微分可能ということとなる．

（第2段）このように微分可能性について言い換えを行っておいた上で，次のように2変数関数 $z=f(x,y)$ の全微分可能性を説明する．2変数関数 $z=f(x,y)$ が点 (a,b) において**全微分可能**であるとは，(h,k) の関数 $f(a+h,b+k)$ が，

$$f(a+h,b+k)$$
$$=f(a,b)+Ah+Bk+\epsilon(h,k)$$

（定数項 + 1次の項 + 高次の項）　(6)

と表示できることである．ここで $\epsilon(h,k)$ が (h,k) について**高次の項**であるとは

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\epsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0 \tag{7}$$

となることである．

こう考えてみると，「全微分」の定義が，素直に理解でき，すっきりするのではないかと思う．

5. 名著に親しみ，先人に学ぶ

「名著に親しみ，先人に学ぶことは，数学では最も大事なことの一つである」と，古来から言われている．私の場合もやはりそうであった．

私の大学1年のとき，高木貞治の「解析概論」を読みなさい，読んでみて第1章が好きな人は数学に進みなさい，と言われていた．斎藤偵四郎先生にお願いして，1年生の土曜の午後，4, 5人でゼミナールを行い，私はそれに全力投球した．ノートを取り，読み進めた．「紙背を徹して読め．行間を読め」とも言われていた．毎日，1時間ほど「解析概論」をノートを取りながら読むのに時間をかけた．ゼミでは，「ノートを見ないで，数学の内容を自分で整理して話せるようにしなさい」と指導された．発表の前日は，相当の時間をかけた．

大学2年から3年の2年間は，ポントリャーギン著「連続群論（上，下）」を読んだ．これは読み応えがあった．私は上巻の，「群」，「位相空間」，「位相群」，「位相体」，「コンパクト位相群の線形表現」，「局所コンパクト・アーベル群」と読み進んだ．どんどん，数学の世界に引き込まれていき，痛快であった．下巻に入ると，テーマはリー群となる．リー群の概念や被覆空間の話は面白かったが，コンパクト・リー群の構造，リー代数とルート系のあたりで，「なんだかゴタゴタしているな」と感じるようになったが，ともかく読み終えた．最後に，「文献についての補注」というのがあり，今，そこを開いてみると，「E. Cartan」と「H. Weyl」の文字が鉛筆で囲ってある．また，「微分幾何学とリー群論」，「対称空間を含む均質 Kähler 空間は最近，多くの人の興味を惹くようになった」という個所にも線が引いてある．当時の自分はこの辺りに興味を持っていたのか，と改めて思った．

4年のゼミナールでは，竹崎正道先生のゼミを選んだ．実は，3年の後期，数学の同級生で作っていた同人誌「杜」を出していた友人に「何か書くよ

うに」と頼まれ，ポントリャーギンの「連続群論（下巻）」の中から，「被覆空間」について，自分なりに整理してまとめて書いていた．その文章が竹崎先生の目に留まり，「この論説はどうしてまとめたのかね」と尋ねられ，上のような次第をお話ししたところ，「よくまとまっている．この調子でやりなさい」とほめられ，うれしくなったのであった．ゼミナールは，L. Lusternik と S. Sobolev の関数解析の本であった．竹崎先生はどういうわけか，ご自分の専門より

S. Helgason, "Differential Geometry and Symmetric Spaces", 1962, Academic Press

を自分で読むことを，私に薦められた．4 年から大学院 1 年の 2 年間に何とか苦労してこの本を読み終えた．

4 年になり，大学院の進学のことを考えねばならない．Helgason の本を読む以上，大阪大学の村上信吾先生の所へ行くのが一番良いと考えて，大阪大学への進学を目指すこととした．

大学院の受験勉強を兼ねて，1 年からこれまでの間に習ったこと全部を，ノートに整理してまとめることにした．「微積分」(級数，ルベーグ積分)，「代数学」（線形代数，ガロア理論，付値論，有限群の表現論，ヤング図形)，「幾何学」（曲線論，曲面論，位相幾何学)，「位相空間論」（位相空間，距離空間，アスコリ＝アルツェラの定理)，「函数論，微分方程式」（ローラン展開，正規族，留数定理，常微分方程式系の解の存在と一意性，解の安定性）などと分けて，まとめた．これらのノートの作成を通して，自分の頭が思いがけず整理され，非常に役に立った．今もこれらのノートは保存してある．

6. 種を見つけ畑に植え，丹精して育てる

幾何学の出発点はユークリッド空間にある．そこで良い「種」を見つけて「問題」を立てよう．

「曲がった空間（多様体）のときにはどうなるのだろうか」

この「種」を多様体の「土壌」に植え，丹精込めて育てるのである．楽しい「悪戦苦闘」の始まり．

現在興味を持っている，調和関数とその非線形拡張である調和写像，重調和関数（一般に k-調和関数）とその非線形拡張である重調和写像（一般に k-調和写像）を例にとって，説明しよう．

6.1 k-調和関数とその特長付け定理

まず「種」を説明する．m 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ 内の開領域 Ω 上の**調和関数** $f(x)$ とは，

$$\Delta f = 0 \quad (\Omega \text{ 上}) \tag{8}$$

が成り立つことをいう．ここでラプラシアン Δ とは $\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}$ のことである（ただし $\mathbb{R}^m$ の座標を $x = (x_1, \cdots, x_m)$ と表す)．また，**k-調和関数** $f(x)$ とは，

$$\Delta^k f = \underbrace{\Delta(\cdots(\Delta f)\cdots)}_{k\text{ 回続ける}} = 0 \quad (\Omega \text{ 上}) \tag{9}$$

となることをいう．$k = 2$ のとき，重調和関数または 2-調和関数と呼ばれている．

Ω が原点中心の星形領域であるとは，$x \in \Omega$ かつ $0 \le \alpha \le 1$ ならば，$\alpha x \in \Omega$ が成り立つような領域をいう．さて，k-調和関数のアルマンシ (Almansi) 表現定理とは，次のような k-調和関数を特長付ける面白い定理である[9, 10]：

定理 1（k-調和関数のアルマンシ表現定理）
(1) 原点中心の星形領域 Ω 上の k-調和関数 f はいつでも次のように表示される．

$$f(x) = |x|^{2k-2}h_k(x) + |x|^{2k-4}h_{k-1}(x) + \cdots + |x|^2 h_2(x) + h_1(x) \tag{10}$$

ここで $|x|^2 = \sum_{i=1}^m {x_i}^2$ であり，k 個の関数 $h_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ は Ω 上の調和関数である．(10) 式を，k-調和関数 f のアルマンシ表現という．
(2) さらに，f が完全優調和であるとは，

$$(-\Delta)^j f \ge 0 \quad (\Omega \text{ 上}) \tag{11}$$

が任意の j $(j = 1, \cdots, k)$ について成り立つときをいう．このとき f のアルマンシ表現に表れる $h_k, h_{k-1}, \cdots, h_2, h_1$ は交互に正値関数，負値関数となって現れる．

「この定理の多様体版，非線形版やネットワークに対する離散版[1]は何であろうか？」

6.2 調和写像と *k*-調和写像

先ほどの調和関数と k-調和関数が「種」である．今度は，種を植えるべき「畑」を説明しよう．

m 次元リーマン多様体 (M,g) から n 次元リーマン多様体への滑らかな写像 f について考える．(M,g) が m 次元ユークリッド空間，$N=\mathbb{R}$ のときが先ほどの場合である．M 内の有界領域 Ω について，f の Ω 上のエネルギー

$$E(f)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|df|^2\,v_g \tag{12}$$

を考え，写像 f がエネルギー E の**臨界点**（臨界写像）であるとは，f の任意の変形 $f_t:\Omega\to N$, $(f_0=f)$ について，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}E(f_t)=0 \tag{13}$$

を満たすときを言う．このような写像 f は**調和写像**と呼ばれている[4~6,12,13]．調和写像は

「テンション場 $\tau(f):=\delta\,df$ が零」

とならねばならないからである．ここで，写像 $f:M\to N$ に対して，$df\in\Gamma(T^*M\otimes f^{-1}TN)$: $T_xM\ni v\mapsto df(v)\in T_{f(x)}N$ は写像の微分と呼ばれており，その余微分 $\delta\,df$ は

$$\begin{aligned}\delta\,df&=-\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}df)(e_i)\\&=-\sum_{i=1}^{m}\{\nabla_{e_i}(df(e_i))-df(\nabla_{e_i}e_i)\}\end{aligned} \tag{14}$$

と定義されている．ここに $\{e_i\}$ は (M,g) 上の局所正規直交枠である．この (14) 式はラプラシアン Δ と符号の違いを除いて同じ定義式なので，ここに調和写像という名の由来がある．1983年，イールスとルメールら[4]は，k-エネルギー

$$E_k(f)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|(\delta+d)^k f|^2\,v_g \tag{15}$$

（実は

$$E_1(f)=E(f),\quad E_2(f)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\tau(f)|^2\,v_g \tag{16}$$

である）とその臨界点（臨界写像）（**k-調和写像**と呼ばれている）を研究することを提唱した．姜国英 (Jiang, G.Y.)[8] は1986年中国語の論文で，$k=2$ のとき2-調和写像の方程式とその第二変分公式を求めることに成功した．この論文の英語訳を小生の拙い英訳[8]で出版したところ，姜氏より感謝のメールと学位論文を送呈して下さった．

調和写像は調和関数と似た性質を持ち，k-調和写像は k-調和関数と似た性質を持つと期待され，研究されている[2,3,7,11,14]．これが私の「夢」である．

参考文献

1) V. Anandam, *Harmonic Functions and Potentials on Finite or Infinite Networks*, Lecture Notes UMI, **12**, Springer, 2011.
2) C.L. Bejan, H. Urakawa, *Yang-Mills fields analogue of biharmonic maps.* In: Topics in Almost Hermitian Geometry and Related Fields, World Scientific, (2005), 41–49.
3) B.Y. Chen, Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type, *Soochow J. Math.*, **17** (1991), 169–188.
4) J. Eells, L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, CBMS, **50**, Amer. Math. Soc, 1983.
5) J. Eells, L. Lemaire, A report on harmonic maps, *Bull. London Math. Soc.*, **10** (1978), 1–68.
6) J. Eells, L. Lemaire, Another Report on Harmonic Maps, *Bull. London Math. Soc.*, **20** (1988), 385–524.
7) T. Ichiyama, J. Inoguchi, H. Urakawa, Biharmonic maps and bi-Yang-Mills fields, *Note di Matematica.* **28** (2009), 233–275.
8) G.Y. Jiang, 2-harmonic maps and their first and second variational formula, *Chinese Ann. Math.*, **7A** (1986), 388–402 (the English translation by H. Urakawa, *Note di Matematica*, **28** (2009), 209–232).
9) M. Nicolesco, Recherche sur les fonctions polyharmoniques, *Ann. scient. École Norm. Sup*, **52** (1935), 183–220.
10) M. Nicolesco, *Les fonctions polyharmoniques*, Hermann. Paris, 1936.
11) S. Nishikawa, *Harmonic maps in complex Finsler geometry*, In: Variational problems in Riemannian geometry, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. **59**, Birkhäuser, (2004), 113–132.
12) 西川青季，『幾何学的変分問題』，岩波書店，2006.
13) 浦川 肇，『変分法と調和写像』，裳華房，1990.
14) The Bibliography of Biharmonic Maps, http://people.unica.it/biharmonic/publication/

（うらかわ・はじめ，東北大学国際教育院）

微分幾何学早わかり (3)

双対接続の幾何

甘利 俊一

微分幾何は，相対性理論はいうまでもなく，物理学と密接に連携して発展してきた．運動エネルギーは 2 次形式で書ける場合が多く，それがリーマン空間に通じる．ここからリーマン接続が出るが，それでは不足だと捩率が導入された．これらは，いずれも平行移動で長さを保存する．双対接続は，この考えを破って出てくるが，極めて自然なものである．情報幾何が提唱するまで，双対接続が幾何学で取り上げられなかったのはむしろ不思議である．それこそ，1930 年代，E. Cartan の時代に研究されて当然であった．今回は情報幾何の核心である双対接続を導入し，さらに双対平坦な空間の美しい構造を明らかにする．これは豊富な内容を秘め，応用上大変有用である．

11.1 双対接続の導入

ユークリッド空間では，直線とは 2 点を結ぶ距離最短の線であり，かつ線に沿って方向が変わらない（真っすぐである）．でも，最短性と方向不変性は，異なった概念である．ユークリッド空間でこの 2 つがたまたま一致したからといって一般の空間にこれを強要するのは，行きすぎではないか．

数学は，この 2 つが一致するリーマン接続以外の接続も考えた．Einstein の導入した捩率がある場合には，平行移動によってベクトルの長さは変わらないが，測地線は必ずしも最短にはならない．この空間は，リーマン計量 g と捩率テンソル S の 2 つによって決まる．この多様体 M を $\{M, g, S\}$ のように書く．

話を拡げてリーマン空間 $\{M, g\}$ に 2 つの接続が定義されたとしよう．このとき，2 組の接続の係数をそれぞれ $\Gamma_{ijk}, \Gamma^*_{ijk}$ のように書く．これに関係した共変微分も 2 つあるから ∇, ∇^*，平行移動も 2 つで $\prod, \prod^*$ と書く．これらはリーマン接続ではない．平行移動は一般に計量を保存せず，

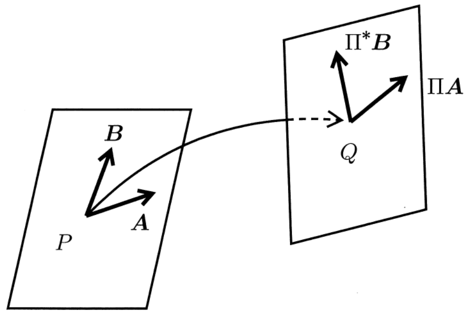


図 11.1　双対平行移動による内積の保存.

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle \neq \left\langle \prod \boldsymbol{X}, \prod \boldsymbol{Y} \right\rangle \tag{11.1}$$

でよいとする．$\prod^*$ についても同じである．計量と接続が全く無関係というのは，いかに数学は自由とはいえ，構造の美しさに欠ける．そこで，2 つの接続が対となって，計量を保存する，すなわちベクトル $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ をそれぞれ 2 つの接続で平行移動すれば，内積が保存される，

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = \left\langle \prod \boldsymbol{X}, \prod^* \boldsymbol{Y} \right\rangle \tag{11.2}$$

としよう（図 11.1）．$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$ ならば

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle = \left\langle \prod \boldsymbol{X}, \prod^* \boldsymbol{X} \right\rangle. \tag{11.3}$$

このとき，接続 Γ_{ijk} と Γ^*_{ijk}（共変微分 ∇ と ∇^*）は，計量 g に関して双対であるという．

2 つの双対な接続を共変微分を用いて述べることもできる．(11.1) において道筋を無限に短くすれば，この関係を微分

$$\boldsymbol{Z}\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = \langle \nabla_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle + \langle \boldsymbol{X}, \nabla^*_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Y} \rangle \tag{11.4}$$

で表すことができる．これを ∇ と ∇^* が計量 g に関して双対であることの定義に使ってよい．ここで，ベクトル場 $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ として $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k$ を用いれば，リーマン接続の場合と似た式

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{ijk} + \Gamma^*_{ikj} \tag{11.5}$$

が得られる．

接続 ∇ と ∇^* が g に関して双対であるとき，その平均をとったものを

$$\nabla^{(0)} = \frac{1}{2}\left(\nabla + \nabla^*\right) \tag{11.6}$$

としよう．すると $\nabla^{(0)}$ は，(11.4) 式を用いれば，$\Gamma = \Gamma^*$ としたときの (11.5) 式を満たすことがわかる．すなわち，$\nabla^{(0)}$ はリーマン接続による共変微分である．これを接続係数の成分で書けば

$$\Gamma^0_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ijk} + \Gamma^*_{ijk}\right) \tag{11.7}$$

である．これを見ると，双対接続とはリーマン接続を2つに分けたものといってよい．2点を結ぶ測地線も，最短経路であるリーマン測地線を2つに分けて定義したものになる．それぞれは最短経路ではない．

いま，2つの接続の差をとり，これを

$$T_{ijk} = \Gamma^*_{ijk} - \Gamma_{ijk} \tag{11.8}$$

とおこう．すると，これは3つの添字について対称なテンソルになり，3次形式を与える．これを3次テンソルと呼ぼう．リーマン接続との関係は

$$\Gamma_{ijk} = [ij,k] - \frac{1}{2}T_{ijk}, \quad \Gamma^*_{ijk} = [ij,k] + \frac{1}{2}T_{ijk} \tag{11.9}$$

のように書ける．逆に，3つの添字をもつ対称なテンソル場 $T(\boldsymbol{\xi})$ を定義し，2つの接続を (11.9) で定義すれば，双対接続が得られる．リーマン接続は $T=0$ の場合と考えればよく，このときは，2つの接続 ∇, ∇^* は一致するから，自己双対になっている．双対接続の空間を $\{M, g, T\}$ と書く．

3次テンソル T はどう定義してもよいことになるが，確率分布空間の場合には，不変性から一意的に決まる．これについては後ほど，統計の幾何学のところで述べる．g と共に T の一意性を見出したのは，ロシアの数学者 Chentsov の偉大な貢献である．双対接続の空間 $\{M, g, T\}$ は，甘利と長岡が提出した微分幾何の新しい概念である．後に，アファイン微分幾何からもこのような関係が出ることが明らかにされた．ただ，アファイン微分幾何の場合は，その特殊な場合を扱うにすぎない．情報幾何の諸量が，アファイン微分幾何の立場からある程度解釈できることは，数学の広さと普遍性を語るものである．

11.2 双対平坦なリーマン空間

双対接続をもつリーマン空間 $\{M, g, T\}$ で，曲率（リーマン接続によるリーマン曲率ではなくて，双対な接続による曲率）が0になる空間がある．双対というからには，片方だけ曲率が0になるのはフェアでない．片方で消えればもう片方も消えるという，運命共同体が自然である．

定理 11.1　双対接続で，$\boldsymbol{R} = (R_{ijkl})$ が0になれば，$\boldsymbol{R}^* = \left(R^*_{ijkl}\right)$ も0であり，逆も成立する．

証明　点 P で接ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ をとり，これをループに沿って世界一周させる．すると，双対性により

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \left\langle \prod \boldsymbol{A}, \prod^* \boldsymbol{B} \right\rangle \tag{11.10}$$

が成立する．いま，$\boldsymbol{R}=0$ が成立していれば，

$$\boldsymbol{A} = \prod \boldsymbol{A} \tag{11.11}$$

であるから，

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \left\langle \boldsymbol{A}, \prod^* \boldsymbol{B} \right\rangle, \tag{11.12}$$

これが任意の $\boldsymbol{A}$ について成立するから，

$$\boldsymbol{B} = \prod^* \boldsymbol{B} \tag{11.13}$$

でなければならない．これは，曲率 $\boldsymbol{R}^* = 0$ を意味する．

したがって，これからはどちらで曲率が 0 などと言わずに，$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^* = 0$ の空間を双対平坦空間という．双対平坦であるなら，それぞれの接続に対してアファイン座標系が存在する．これを $\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{\eta}$ と書こう．アファイン座標系をとれば，それぞれの座標系で

$$\Gamma_{ijk}(\boldsymbol{\theta}) = 0, \tag{11.14}$$

$$\Gamma^{*ijk}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \tag{11.15}$$

が成立する．ここで，$\boldsymbol{\theta}$ 座標系に関しては添字を上に書き（$\boldsymbol{\theta} = (\theta^i)$），$\boldsymbol{\eta}$ 座標系に対しては添字を下に書く（$\boldsymbol{\eta} = (\eta_i)$）．座標系を変えるのに i, j や κ, λ などと添字の種類を変えるのではなく，$\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{\eta}$ の場合は上下の位置を変える．これは勝手ではなく，双対ということから自然に決まる．少し，詳しく述べておこう．

ベクトル $\boldsymbol{A}$ は，基底 $\boldsymbol{e}_i$ を用いて $\boldsymbol{A} = A^i \boldsymbol{e}_i$ のように成分で書ける．$\boldsymbol{A}$ は線形空間 L（$\boldsymbol{\xi}$ 点ではその接空間，$\boldsymbol{\xi}$ を省いて書く）に属する．これに対して，線形空間の双対空間 L^* がある．これは L のベクトルを実数に写像する線形写像の全体である．ここで，L^* の基底として $\left\{\boldsymbol{e}^{*i}\right\}$ を用いる．これは L の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を 1 に写像し，他の $\boldsymbol{e}_j$ を 0 に写像するものとする．

$$\boldsymbol{e}^{*i}(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j. \tag{11.16}$$

L^* の元を $\boldsymbol{B}^*$ とし，$\boldsymbol{B}^* = B^*_j \boldsymbol{e}^{*j}$ のように成分で表現する．これを $\boldsymbol{A}$ に作用させると，

$$\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{A}) = B^*_j A^i \boldsymbol{e}^{*j}(\boldsymbol{e}_i) = B^*_i A^i \tag{11.17}$$

のように書ける．

計量が定義されていて内積が求まる線形空間の場合，L に属するベクトル $\boldsymbol{B}$ は内積によって $\boldsymbol{A}$ を実数に線形に写像する．すなわち，

$$\langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} \rangle = g_{ij} B^j A^i \tag{11.18}$$

だから，$\langle \boldsymbol{B}, \cdot \rangle$ は L^* の要素と考えてよい．内積を用いれば，$\boldsymbol{B} \in L$ は，L^* のベクトル $\boldsymbol{B}^*$,

$$B^*_i = g_{ij} B^j \tag{11.19}$$

と同一視できる．

計量の導入されている有限次元の線形空間では，$L \cong L^*$ が成立し，L と L^*

を同一視してよい（無限次元ではこうはいかない）．このとき，L と L^* で添字の上下を書き分け，B^i なら $\boldsymbol{B} \in L$ の成分，B_i^* なら $\boldsymbol{B} \in L^*$ の成分とすれば，$*$ をつけなくとも混乱がない．

このとき，

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = g_{ij} \tag{11.20}$$

だから，$\boldsymbol{e}_i$ を L^* に写した $\boldsymbol{e}^{*i}$ は

$$\boldsymbol{e}^{*i} = g^{ij}\boldsymbol{e}_j, \quad \boldsymbol{e}_j = g_{ij}\boldsymbol{e}^{*j} \tag{11.21}$$

の関係にある．こうして，L と L^* とを同一視し，添字の上下だけでどちらかを判別する．

双対座標系 $\boldsymbol{\eta}$ の基底ベクトル $\left\{\boldsymbol{e}^j\right\}$ は $\boldsymbol{\theta}$ の基底ベクトル $\{\boldsymbol{e}_i\}$ と直交するから，これらを L の基底 $\boldsymbol{e}_i$ に対応する双対接空間 L^* の基底と考えよう．本来なら $\boldsymbol{e}^{*i}$ と書くのだが，$*$ を除いても添字の上下で区別がつく．L^* の基底ベクトルは添字を上に書く．これからも，添字の上げ下げを計量 g_{ij}，もしくはその逆行列 g^{ji} を使って自由に行うが，その性格をしっかりと見抜いてほしい．添字を上下で使い分けるのはテンソル計算の奥義である．これは座標系に応じて文字の種類を変える Schouten 流の記法と並んで，便利極まりないのでぜひお勧めしたい．

話が脱線した．双対接続の空間で，2 つのアファイン座標系 $\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{\eta}$ に沿ったベクトル場（自然基底の場），$\boldsymbol{e}_i$ と $\boldsymbol{e}^i$ を考えよう．接続は平坦だから，点 P での $\boldsymbol{e}_i(P)$ は，P がどこにあっても平行移動で同じ $\boldsymbol{e}_i$ に重なり，$\boldsymbol{e}^i$ は双対平行移動で $\boldsymbol{e}^i$ に重なる．すなわち Q 点に平行移動すれば

$$\boldsymbol{e}_i(Q) = \prod \boldsymbol{e}_i(P), \quad \boldsymbol{e}^i(Q) = \prod{}^{*} \boldsymbol{e}^i(P) \tag{11.22}$$

が成立する．ここで，双対性からこれらの内積は

$$\left\langle \boldsymbol{e}_i(P), \boldsymbol{e}^j(P) \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{e}_i(Q), \boldsymbol{e}^j(Q) \right\rangle \tag{11.23}$$

で，どこでも同じ値をとる定数の行列となる．我々の場合，どこでも

$$\left\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}^j \right\rangle = \delta_i^j \tag{11.24}$$

となるようにアファイン座標系 $\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{\eta}$ とを選んだ．すなわち，接空間の 2 つの基底系 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ と $\left\{\boldsymbol{e}^i\right\}$ は，異なる i と j で，互いに直交するようにできる．このような 2 組の基底を陪直交系と呼ぶ．以後，双対平坦な空間でアファイン座標を選ぶのに，基底が陪直交系をなすようにする．

ここで，2 つの双対なアファイン座標系の間の変換を考えよう．これらは非線形の関係

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\eta}), \quad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}) \tag{11.25}$$

で結ばれている．いま，変換のヤコビ行列を

$$\frac{\partial \eta_j}{\partial \theta^i}, \quad \frac{\partial \theta^i}{\partial \eta_j} \tag{11.26}$$

とおこう．添字の位置に注意してほしい．また，座標系が違えば添字の文字種を変えると言ったが，双対性から同じ文字種 i, j などを使い，上下の位置だけを変えていることに注意してほしい．

接空間の基底の変換により，2 つの基底系は

$$\boldsymbol{e}^j = \frac{\partial \eta_j}{\partial \theta^i} \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta_j} \boldsymbol{e}_j \tag{11.27}$$

で結ばれている．これより (11.21) を用いれば，

$$\frac{\partial \eta_j}{\partial \theta^i} = g_{ij}, \quad \frac{\partial \theta^i}{\partial \eta_j} = g^{ij} \tag{11.28}$$

であり，変換の行列は実は計量行列そのもの，そして双対系での計量はその逆行列

$$\left(g^{ij}\right) = \left(g_{ij}\right)^{-1} \tag{11.29}$$

であることが分かる．これは，g_{ij} を用いた添字の上げ下げ，

$$g^{kl} = g^{ki} g^{jl} g_{ij} \tag{11.30}$$

とも適合している．

11.3 双対平坦空間のポテンシャル関数と規範ダイバージェンス

双対平坦空間について，いくつかの基本定理が成立する．

定理 11.2　双対接続空間には，2 つの双対なアファイン座標系 $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}$ とそれらの凸関数 $\psi(\boldsymbol{\theta})$ と $\varphi(\boldsymbol{\eta})$ が存在して，計量行列はそのヘッシアン

$$g_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \partial_i \partial_j \psi(\boldsymbol{\theta}), \quad g^{ij}(\boldsymbol{\eta}) = \partial^i \partial^j \varphi(\boldsymbol{\eta}) \tag{11.31}$$

で与えられ，3 次テンソルは

$$T_{ijk}(\boldsymbol{\theta}) = \partial_i \partial_j \partial_k \psi(\boldsymbol{\theta}), \tag{11.32}$$

$$T^{ijk}(\boldsymbol{\eta}) = \partial^i \partial^j \partial^k \varphi(\boldsymbol{\eta}) \tag{11.33}$$

となる．ただし，$\partial_i = \partial/\partial\theta^i$, $\partial^i = \partial/\partial\eta_i$.

証明　双対接続の条件式 (11.5) で，いまアファイン座標系 $\boldsymbol{\theta}$ をとれば，Γ_{ijk} は 0 になるから

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma^*_{ikj} \tag{11.34}$$

が得られる．対称な接続を考えているから，上式は添字 i と k に関して対称で

$$\partial_i g_{jk} = \partial_k g_{ji} \tag{11.35}$$

となる．添字 j を固定すれば，

$$\partial_i g_{k\cdot} = \partial_k g_{i\cdot} \tag{11.36}$$

となるから，j 毎にある関数 $\psi(\boldsymbol{\theta})$ が存在して，

$$g_{i\cdot} = \partial_i \psi. \tag{11.37}$$

$\cdot$ が j のときこの関数を ψ_j と書けば

$$g_{ij} = \partial_i \psi_j \tag{11.38}$$

と書けることになる．ところが g_{jk} は対称であるから，ふたたび

$$\partial_k \psi_j = \partial_j \psi_k \tag{11.39}$$

が成立する．ここからある ψ に対して

$$\psi_j = \partial_j \psi \tag{11.40}$$

が言える．したがって

$$g_{ij} = \partial_i \partial_j \psi. \tag{11.41}$$

計量は正定値行列だから，$\psi(\boldsymbol{\theta})$ は凸関数である．同じことを双対座標系 $\boldsymbol{\eta}$ についてやれば，関数 $\varphi(\boldsymbol{\eta})$ が存在して

$$g^{ij}(\boldsymbol{\eta}) = \partial^i \partial^j \varphi(\boldsymbol{\eta}) \tag{11.42}$$

が出る．T が ψ または φ の 3 階微分であることもすぐに導ける．

定理 11.3　2 つの座標系 $\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{\eta}$ は Legendre 変換で結ばれていて，

$$\eta_i = \partial_i \psi(\boldsymbol{\theta}), \quad \theta^j = \partial^j \varphi(\boldsymbol{\eta}). \tag{11.43}$$

さらに，2 つの凸関数は

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) + \varphi(\boldsymbol{\eta}) - \theta^i \eta_i = 0 \tag{11.44}$$

を恒等的に満たすようにできる．

これは前に述べたことであった．ここから次の定理が得られる．

定理 11.4　双対平坦空間には 2 点 P と Q の間に規範ダイバージェンス

$$D\left[\boldsymbol{\theta}_P : \boldsymbol{\theta}_Q\right] = \psi\left(\boldsymbol{\theta}_P\right) + \varphi\left(\boldsymbol{\eta}_Q\right) - \theta_P^i \eta_{Qi} \tag{11.45}$$

が導入される．その双対ダイバージェンスは，P と Q を入れ替えた

$$D^*\left[\boldsymbol{\theta}_P : \boldsymbol{\theta}_Q\right] = D\left[\boldsymbol{\theta}_Q : \boldsymbol{\theta}_P\right] \tag{11.46}$$

である．

2 つのポテンシャル関数 ψ, φ を結ぶ (11.44) 式で，これを 2 点間に直した (11.45) は，

$$D\left[\boldsymbol{\theta}_P : \boldsymbol{\theta}_Q\right] \geq 0 \tag{11.47}$$

を満たすことが凸性から容易に証明できる．したがってこれはダイバージェンスである．明らかにこれは，ポテンシャル関数 $\psi(\boldsymbol{\theta})$ を用いた Bregman ダイバージェンスになっている．凸関数 $\psi(\boldsymbol{\theta})$ が与えられれば双対平坦な空間 $\{M, g, T\}$ が得られる．ここで注目すべきことは，双対平坦な空間 $\{M, g, T\}$ が与えられれば，そこから凸関数 $\psi(\boldsymbol{\theta})$ が（アファイン変換による自由度を除いて）一意に定まり，これがダイバージェンスを一意に定めることである．これを規範ダイバージェンスと呼ぶ．

双対平坦空間において拡張ピタゴラスの定理，射影定理が導けることもこれまでに述べたとおりである．

双対平坦な空間の計量は関数 $\psi(\boldsymbol{\theta})$ のヘッシアンで書ける．志磨はこれをケーラー複素多様体の実数版に対応するものと考え，ヘッシアン多様体と呼んでいる[1)]．これは一般の双対平坦な空間に他ならない．

リーマン空間 $\{M, g\}$ が与えられたとしよう．ここに 3 次テンソル場 T_{ijk} を導入して，$\{M, g, T\}$ を双対平坦な空間とすることができるであろうか．このためには，g にいかなる条件が必要か？ これは積分可能条件の形で書け，新しいテンソルを定義すると思われるが，未解決の問題である．

11.4 ダイバージェンスと双対幾何

空間 M にダイバージェンス関数 $D\left[\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}'\right]$ が与えられたときに，ここから双対接続の空間構造が導かれることはすでに述べた[2)]．これを本格的に議論しよう．まず，リーマン計量である．これは，微小な 2 点 $\boldsymbol{\xi}$ と $\boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi}$ の間のダイバージェンスとして，テイラー展開

$$ds^2 = D\left[\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi}\right] = \frac{1}{2} g_{ij}(\boldsymbol{\xi}) d\xi^i d\xi^j \tag{11.48}$$

による係数を用い，g_{ij} で定義する．このとき，

$$g_{ij} = \partial_i \partial_j D\left[\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}'\right]_{\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\xi}}. \tag{11.49}$$

これを少し形式的に整備しよう．いま，$D\left[\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}'\right]$ について，最初の変数 $\boldsymbol{\xi}$ について微分するのと，2 番目の変数 $\boldsymbol{\xi}'$ で微分するのと分けて，微分記号を $D\left[\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}'\right]$ の中に入れて

$$D\left[\partial_i \partial_j : \partial_k\right] = \frac{\partial^3}{\partial \xi^i \partial \xi^j \partial \xi'^k} D\left[\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}'\right]_{\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\xi}} \tag{11.50}$$

のような表現法を用いる．うしろの ∂_k は $\partial / \partial \xi'^k$ のことである．すると，

$$g_{ij} = D\left[\partial_i \partial_j : \cdot\right] = D\left[\cdot : \partial_i \partial_j\right] = -D\left[\partial_i : \partial_j\right] \tag{11.51}$$

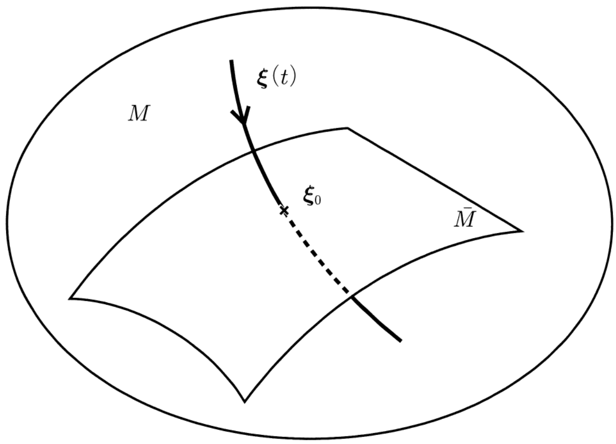


図 11.2　ダイバージェンスを最小にするのは双対測地線である．

が得られる．

次は接続である．2 つの接続を

$$\Gamma_{ijk}(\boldsymbol{\xi}) = -D\left[\partial_i\partial_j : \partial_k\right], \quad \Gamma^*_{ijk} = -D\left[\partial_k : \partial_i\partial_j\right] \tag{11.52}$$

で定義する．ここから T を求めれば

$$T_{ijk} = D\left[\partial_i\partial_j : \partial_k\right] - D\left[\partial_k : \partial_i\partial_j\right]. \tag{11.53}$$

これは 3 階の対称テンソルであることが確かめられる．これより 2 つの接続が双対の関係にあることが分かる．対称なダイバージェンス $D\left[\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}'\right] = D\left[\boldsymbol{\xi}' : \boldsymbol{\xi}\right]$ を用いれば，$T_{ijk} = 0$ で，リーマン空間が得られる．

ダイバージェンス $D\left[\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}'\right]$ から定義される双対接続がどのような意味を持つかを考えておこう．空間 M の中に埋め込まれた部分空間 $\bar{M}$ を考え，$\bar{M}$ の点 $\boldsymbol{\xi}_0$ を通り，$\bar{M}$ を $\boldsymbol{\xi}_0$ 点でつき抜ける曲線を $\boldsymbol{\xi}(t)$ とする．$\boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0$ とし，t が小さいところで

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{\xi}_0 + \dot{\boldsymbol{\xi}}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{\xi}}(0)t^2 \tag{11.54}$$

と展開する．

M の点 $\boldsymbol{\xi}$ に対して，これにダイバージェンスの意味で一番近い $\bar{M}$ の点を探すことにしよう．曲線 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 上でこれに一番近い $\bar{M}$ の点が $\boldsymbol{\xi}_0$ だったとすると，この曲線はどんな特徴を持つだろう（図 11.2）．t が小さいところで考え，$D\left[\boldsymbol{\xi}(t) : \boldsymbol{\xi}'\right]$ は $\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\xi}_0$ のところで最小値をとるとすると，

$$\partial_{\boldsymbol{\xi}'} D\left[\boldsymbol{\xi}_0 + \dot{\boldsymbol{\xi}}t + \frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{\xi}}t^2 : \boldsymbol{\xi}'\right]_{\boldsymbol{\xi}'=\boldsymbol{\xi}_0} = 0 \tag{11.55}$$

が成立する．ただし，微分 $\partial_{\boldsymbol{\xi}'}$ は M の接方向に取ればよい．上式をテイラー展開すると

$$\left(\partial_{\boldsymbol{\xi}}\partial_{\boldsymbol{\xi}'}D\right)\dot{\boldsymbol{\xi}}t + \frac{1}{2}\left[\left(\partial_{\boldsymbol{\xi}}\partial_{\boldsymbol{\xi}'}D\right)\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \left(\partial_{\boldsymbol{\xi}}\partial_{\boldsymbol{\xi}}\partial_{\boldsymbol{\xi}'}D\right)\dot{\boldsymbol{\xi}}\dot{\boldsymbol{\xi}}\right]t^2 = 0 \tag{11.56}$$

が成立する．t の 1 次の項は

$$g_{ji}\dot{\xi}^i = 0, \tag{11.57}$$

ただし j は $\bar{M}$ の接方向を表すとする．これは曲線 $\boldsymbol{\xi}(t)$ が $\bar{M}$ に直交していることを示す．2 次の項は

$$g_{ij}\ddot{\xi}^j + \Gamma_{ijk}\dot{\xi}^j\dot{\xi}^k = 0 \tag{11.58}$$

である．すなわち，$\boldsymbol{\xi}(t)$ は単に $\bar{M}$ に直交しているだけでなく，$\bar{M}$ の近傍で真っすぐ（測地線）であることを示す．実際，空間が双対平坦であれば，測地線が大域的にも $D[\boldsymbol{\xi}_0 : \boldsymbol{\xi}]$ を最小にする*1)．

ダイバージェンス D から双対幾何学構造を導くアイデアは江口真透が提唱した．A.P. Dawid の示唆もあったという．たしかに，これは双対構造を定義する卓越したアイデアであることが，上の考察からわかる．

終わりの一言

今回は双対接続，そして双対平坦な空間の構造を調べた．これまでに，凸関数に由来するダイバージェンスとその幾何学を述べてきたから，今回でその基礎付けができたことになる．同時に，これは Legendre 変換に関わる構造の幾何学化でもある．これまでに，物理や数学でこのような扱いがなされなかったことがむしろ不思議と言えよう．物理ではエネルギー保存は基本の法則である．幾何学も，平行移動における計量の保存にとらわれて，双対構造を見落としていた．測地線における最短性と方向不変性を別のものとして扱い，なおかつ計量と接続を相性の良いものにするのに，双対接続はまたとなく都合がよい自然なものである．次回は，あと一息，多様体の埋め込みを述べ，統計的推論の幾何に入る．

参考文献

1) H. Shima, *The Geometry of Hessian Structures*, World Scientific, 2007（志磨裕彦，『ヘッセ幾何学』，裳華房，2001）．
2) S. Eguchi, Second order efficiency of minimum contrast estimators in a curved exponential family, *Annals of Statistics*, **11**, 793–803, 1983.
3) T. Kurose, On the divergence of 1-conformally flat statistical manifold, *Tohoku Mathematical Journal*, **46**, 427–433, 1994.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

*1) 双対平坦でない $\{M, g, T\}$ が与えられたとしよう．このとき，規範的ダイバージェンス $D\left[\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}'\right]$ が存在して，$D\left[\boldsymbol{\xi}' : \boldsymbol{\xi}'\right]$，$\boldsymbol{\xi}' \in \bar{M}$ を最小にする $\boldsymbol{\xi}_0 \in \bar{M}$ は，$\boldsymbol{\xi}$ の $\bar{M}$ への測地線による射影，すなわち $\boldsymbol{\xi}$ と $\boldsymbol{\xi}_0$ とを結ぶ測地線が $\boldsymbol{\xi}_0$ 点で M と直交するようにできればうれしい．双対平坦の場合はこれができた．α 分布族の場合も α ダイバージェンスを用いれば，これができる．黒瀬の論文[3)]を参照．一般の場合にはわかっていない．

2011年 (1月号～12月号) 総目次

Vol. 49, No. 571～Vol. 49, No. 582

特　集（2012 年 2 月号予告）

古典のススメ［物理編］

新しい発想のヒントを探る

本体 952 円

特　集（2011 年 12 月号）

物理と仮説

論理的考察を進めるために

本体 952 円

編集後記

読者の皆様は今まで触れた数学や物理の中で思い入れのある定理や理論はあるでしょうか．私もこうしたことはなかなか経験なかったのですが，いろいろと本などを見ていくうちに思い入れのある話題が出てきました．そこにある考え方は日常生活でも役に立つことがあるので，重宝しています．

今回の特集では加藤先生が巻頭で書かれていらっしゃいますように，通常，「〇〇〇〇というタイトルで書いてください」と執筆依頼するところをあえてタイトルを未定とし，「自分が物理学を研究する上で大事・有用だと感じる数学について自由に思い入れや蘊蓄などを書いてください」という形で進めさせていただきました．特集では様々なテーマが登場しますが，各先生方のそれらに対する熱い思いが伝わってくるのではないかと思います．

小誌は一足先に新年を迎えました．今年も皆様に数学や物理は面白いと感じてもらえるようなテーマをお届け致しますので，楽しんでご覧いただければ幸いです．　(R)

数　理　科　学　1月号

2012 年 1 月 1 日発行

数 理 科 学 編 集 部　　発行人 木　下　敏　孝

TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁